MARIUS I. STOKA

GEOMETRIE DIFERENTIALA

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI - 1964

Scanned with OKEN Scanner

Adam Elvira
1966

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
Institutul Pedagogic, Bucureşti

MARIUS I. STOKA
candidat în ştiinţele fizico-matematice

GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti - 1964

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

CURBE PLANE

1. Reprezentările analitice ale unei curbe plane

Fie Ou o axă şi $M(u_o)$ un punct pe această axă. Vom numi vecinătate a punctului M pe axa Ou un interval deschis cu centrul în M, deci mulţimea punctelor de pe axa Ou ale căror coordonate verifică inegalitatea $u_o - \varepsilon < u < u_o + \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

In planul raportat la sistemul de axe xOy vom numi vecinătate a unui punct $P(x_o, y_o)$ un pătrat cu centrul în P şi cu laturile paralele cu axele (laturile excluse), deci mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate verifică inegalităţile

$$x_o - \varepsilon < x < x_o + \varepsilon, \quad y_o - \varepsilon < y < y_o + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0).$$

Să considerăm acum o mulţime $\mathscr{M}$ de puncte de pe axa Ou şi o mulţime $\mathscr{P}$ de puncte din planul xOy. Dacă fiecărui punct $M \in \mathscr{M}$ îi corespunde un singur punct $P \in \mathscr{P}$ şi, reciproc, dacă fiecărui punct $P \in \mathscr{P}$ îi corespunde un singur punct $M \in \mathscr{M}$, atunci spunem că între mulţimile $\mathscr{M}$ şi $\mathscr{P}$ avem o corespondenţă biunivocă.

Dacă unui punct M' situat într-o vecinătate a punctului M pe axa Ou îi corespunde un punct P' situat într-o vecinătate a punctului P în planul xOy şi reciproc, spunem că corespondenţa dintre mulţimile $\mathscr{M}$ şi $\mathscr{P}$ este bicontinuă.

O corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între două mulţimi se numeşte corespondenţă topologică sau homeomorfism.

O mulţime de puncte din plan homeomorfă cu mulţimea punctelor unui segment de dreaptă se numeşte arc simplu de curbă.

Deci, coordonatele unui punct al unui arc simplu de curbă

sînt de forma: $x = f(u), \quad y = \varphi(u),$ (1)

unde $a \leq u \leq b$, funcţiile f şi φ fiind continue şi admiţînd funcţii inverse care sînt continue. Variabila u se numeşte parametrul pe arcul simplu.

Punctele corespondente valorilor $u=a$ şi $u=b$ ale parametrului se numesc extremităţile arcului.

Dacă parametrul u ia toate valorile care formează mulţimea de definiţie a funcţiilor f şi φ, atunci mulţimea punctelor ale căror coordonate au forma (1) se numeşte <u>curbă simplă</u>.

Curba simplă (1) pentru care funcţiile $f(u)$ şi $\varphi(u)$ sînt derivabile se numeşte curbă simplă derivabilă.

Ecuaţiile (1) se numesc <u>ecuaţiile parametrice</u> ale curbei.

Un punct pe curba (1) este definit de valoarea parametrului u, care se mai numeşte <u>abscisa curbilinie</u>. Vom nota $P(u)$.

O curbă mai poate fi reprezentată prin ecuaţia implicită

$$F(x,y) = 0, \qquad (1')$$

unde funcţia $F(x,y)$ este continuă şi derivabilă, prin ecuaţia explicită

$$y = f(x), \qquad (1'')$$

unde funcţia $f(x)$ este continuă şi derivabilă, sau prin ecuaţia în coordonate polare

$$\rho = f(\theta), \qquad (1''')$$

funcţia $f(\theta)$ fiind continuă şi derivabilă.

O curbă a cărei ecuaţie implicită este o ecuaţie algebrică de gradul n se numeşte <u>curbă algebrică</u> de gradul n.
O curbă care nu este algebrică se numeşte transcendentă.

In legătură cu curbele algebrice să demonstrăm proprietatea:

<u>O curbă algebrică de gradul n este intersectată de o dreaptă în n puncte</u>.

Fie

$$\varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0 \qquad (2)$$

ecuaţia curbei algebrice, unde φ_m este un polinom omogen de gradul m în variabilele x,y, adică

$$\varphi_m = a_{m,o}\, x^m + a_{m-1,1}\, x^{m-1} y + \ldots + a_{o,m}\, y^m$$

şi

$$y = \lambda x + \mu , \qquad (3)$$

ecuaţia unei drepte oarecare din plan.

Inlocuind în (2) pe y cu valoarea dată de (3), obţinem o ecuaţie de gradul n în necunoscuta x. Cele n rădăcini ale acestei ecuaţii sînt abscisele punctelor de intersecţie ale curbei algebrice cu dreapta.

Să arătăm acum că, în general, <u>prin $\frac{n(n+3)}{2}$ puncte trece o singură curbă algebrică de gradul n</u>.

Intr-adevăr, polinomul φ_m conţine $m+1$ coeficienţi, deci ecuaţia (2) are

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

coeficienţi. Dar aceşti coeficienţi sînt omogeni, deci împărţind cu unul dintre ei care este nenul, obţinem

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2} ,$$

coeficienţi neomogeni.

Pentru determinarea curbei (2) avem deci nevoie de $\frac{n(n+3)}{2}$ relaţii. A ne da un punct al curbei revine la a ne da o relaţie între coeficienţi, deci $\frac{n(n+3)}{2}$ puncte ne determină curba.

2. <u>Tangenta şi normala la o curbă</u>

O dreaptă care intersectează o curbă în două puncte confundate se numeşte <u>tangentă</u> la curbă.

Fie o curbă (C) definită de ecuaţiile parametrice (1) şi $P(u)$, $P_1(u_1)$ două puncte pe această curbă (fig.1).

Ecuaţia dreptei PP_1 este

$$\frac{x-f(u)}{f(u_1)-f(u)} = \frac{y-\varphi(u)}{\varphi(u_1)-\varphi(u)}$$

sau

$$\frac{\frac{x-f(u)}{u_1-u}}{\frac{f(u_1)-f(u)}{u_1-u}} = \frac{\frac{y-\varphi(u)}{u_1-u}}{\frac{\varphi(u_1)-\varphi(u)}{u_1-u}} . \qquad (4)$$

Dacă punctul P_1 tinde către P, dreapta PP_1 tinde către tangenta la curbă în punctul P. Deci obţinem ecuaţia tangentei la curba (1) în punctul P(u), făcînd în ecuaţia (4) $u_1 \to u$. Ţinînd seama că funcţiile f(u) şi $\varphi(u)$ sînt derivabile, avem

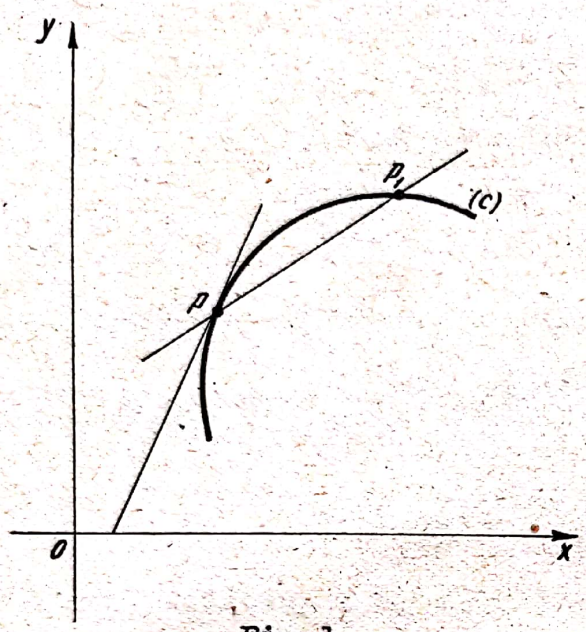


Fig.1

$$\lim_{u_1 \to u} \frac{f(u_1)-f(u)}{u_1-u} = f'(u),$$

$$\lim_{u_1 \to u} \frac{\varphi(u_1)-\varphi(u)}{u_1-u} = \varphi'(u),$$

deci ecuaţia tangentei la curba (1) în punctul P(u) este

$$\frac{x-f(u)}{f'(u)} = \frac{y-\varphi(u)}{\varphi'(u)}. \qquad (5)$$

Dacă curba este dată prin ecuaţia explicită (1"), putem considera că ea are ecuaţiile parametrice

$$x = u, \quad y = f(u) \qquad (5')$$

şi ecuaţia (5) a tangentei la curbă în punct P $[u,f(u)]$ devine

$$y-f(u) = f'(u)(x-u). \qquad (5")$$

Să presupunem acum că curba este dată prin ecuaţia implicită (1') şi fie $P(x_0,y_0)$ un punct pe curbă, adică

$$F(x_0,y_0)=0.$$

Avem

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)},$$

deci ecuaţia tangentei la curbă în punctul P este

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0. \qquad (5')$$

Fie acum o curbă (C) dată prin ecuaţia în coordonate polare (1"').

Ţinînd seama de relaţiile între coordonatele polare şi cele carteziene ortogonale ale unui punct

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

rezultă că ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta .$$

Coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul $P(\theta)$ este

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} = \frac{f'(\theta) \operatorname{tg} \theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta) \operatorname{tg} \theta} .$$

Dacă notăm cu m_1 coeficientul unghiular al razei vectoare OP, avem

$$m_1 = \operatorname{tg} \theta .$$

De asemenea, vom nota cu V unghiul dintre raza vectoare OP şi tangenta la curbă în P. Ţinînd seama de valorile lui m şi m_1, deducem

$$\operatorname{tg} V = \frac{m - m_1}{1 + m m_1} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

sau, avînd în vedere ecuaţia (1"') a curbei,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} . \qquad (6)$$

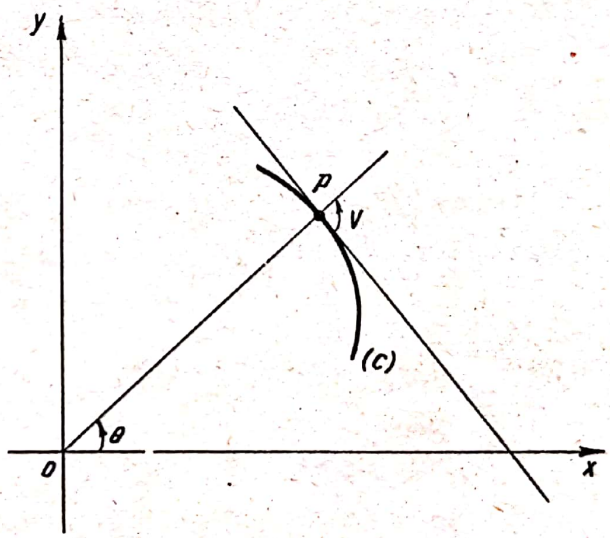


Fig.2

Dreapta perpendiculară pe tangenta la curbă în punctul P se numeşte <u>normala</u> la curbă în acest punct.

După cum curba este dată de ecuaţiile (1), (1') sau (1"), normala la curbă are, respectiv, ecuaţia

$$f'(u) \left[x - f(u)\right] + \varphi'(u) \left[y - \varphi(u)\right] = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} , \qquad (7')$$

$$x - u + f'(u) \left[y - f(u)\right] = 0 . \qquad (7")$$

Dacă notăm cu M proiecţia punctului P pe axa Ox şi cu T şi N intersecţia tangentei, respectiv a normalei, la curbă în P cu această axă, atunci segmentul $\overline{MT}$ se numeşte subtangenta, iar $\overline{MN}$ subnormala (fig.3).

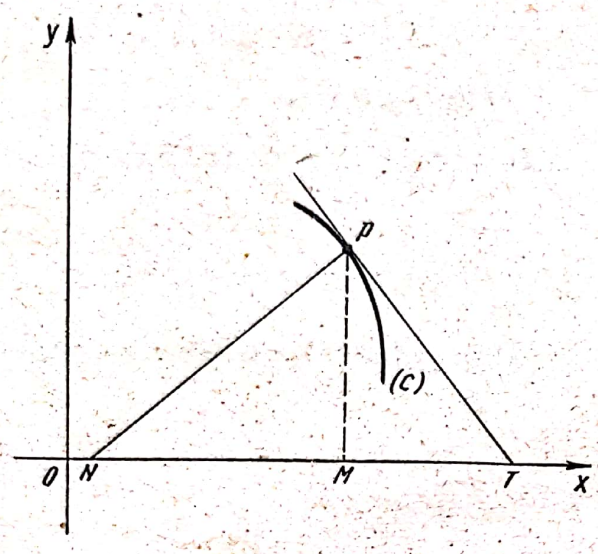


Fig.3

Curba fiind dată de ecuaţia explicită (1"), valorile subtangentei şi ale subnormalei sînt

$$\overline{MT} = -\frac{y}{y'}, \qquad \overline{MN} = yy'.$$

Ca aplicaţie să determinăm curbele plane pentru care subtangenta este constantă. Dacă notăm această constantă cu $-\frac{1}{a}$, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{y'}{y} = a \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{y} = a\,dx.$$

Integrînd această ecuaţie membru cu membru, deducem

$$\ln y = ax + \ln b ,$$

adică

$$y = be^{ax} ,$$

care este o curbă exponenţială.

3. Punct ordinar. Punct singular

Fiind dată o curbă a cărei ecuaţie este (1'), punctul $P(x_0,y_0)$ situat pe această curbă este un punct ordinar (regulat) al ei, dacă

$$\left[F'_x(x_0,y_0)\right]^2 + \left[F'_y(x_0,y_0)\right]^2 \neq 0,$$

cu alte cuvinte dacă cel puţin una din derivatele parţiale ale funcţiei $F(x,y)$ nu se anulează în punctul $P(x_0,y_0)$.

Dacă

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F'_x(x_0,y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,y_0) = 0 \qquad (8)$$

punctul $P(x_0,y_0)$ este un <u>punct singular</u> al curbei (1').

Găsirea punctelor singulare ale curbei (1') revine deci la rezolvarea sistemului (8). Dacă acest sistem nu are soluţii, curba (1') nu are puncte singulare.

Intr-un punct ordinar, curba (1') admite o tangentă bine determinată.

Intr-un punct singular, ecuaţia (5') a tangentei la curba (1') este nedeterminată.

Vom presupune că funcţia $F(x,y)$ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul fiecărui punct în care este definită.

Spunem că punctul $P(x_0,y_0)$ este un <u>punct singular</u> (multiplu) <u>de ordinul p</u> al curbei (1'), dacă în acest punct se anulează toate derivatele parţiale ale funcţiei $F(x,y)$ pînă la ordinul $p-1$ inclusiv şi există cel puţin o derivată parţială de ordinul p nenulă în acest punct.

Dacă $p=2$ punctul se numeşte dublu, iar dacă $p=3$ punctul este triplu.

Fie $P(x_0,y_0)$ un punct multiplu de ordinul p al curbei (1').

In acest caz, ţinînd seama că toate derivatele parţiale ale funcţiei $F(x,y)$ sînt nule pînă la ordinul $p-1$ inclusiv în punct, rezultă că dezvoltarea în serie Taylor a acestei funcţii în jurul punctului $P(x_0,y_0)$ este

$$F(x,y) = \frac{1}{p!}\left[\frac{\partial^p F}{\partial x_0^p}(x-x_0)^p + C_p^1 \frac{\partial^p F}{\partial x_0^{p-1}\partial y_0}(x-x_0)^{p-1}(y-y_0)+\ldots+\right. \tag{9}$$

$$\left.+\frac{\partial^p F}{\partial y_0^p}(y-y_0)^p\right] + \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\partial^{p+1} F}{\partial x_0^{p+1}}(x-x_0)^{p+1}+\ldots+\frac{\partial^{p+1} F}{\partial y_0^{p+1}}(y-y_0)^{p+1}\right]+\ldots$$

Să considerăm acum o dreaptă oarecare, care trece prin punctul $P(x_0,y_0)$, de ecuaţie

$$y-y_0 = m(x-x_0). \tag{10}$$

Pentru a obţine punctele de intersecţie dintre această dreaptă şi curba (1'), trebuie să rezolvăm sistemul format din ecuaţia (10) şi ecuaţia $F(x,y) = 0$, unde funcţia $F(x,y)$ are expresia (9). Obţinem astfel ecuaţia

$$\frac{(x-x_0)^p}{p!}\left(\frac{\partial^p F}{\partial x_0^p} + m\,C_p^1 \frac{\partial^p F}{\partial x_0^{p-1}\partial y_0} + \ldots + m^p \frac{\partial^p F}{\partial y_0^p}\right) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!}\left(\frac{\partial^{p+1} F}{\partial x_0^{p+1}} + \ldots + m^{p+1} \frac{\partial^{p+1} F}{\partial y_0^{p+1}}\right) + \ldots = 0, \qquad (11)$$

termenii nescrişi conţinînd în factor pe $(x-x_0)^{p+2}$.

Această ecuaţie admite de p ori rădăcina $x=x_0$, deci dreapta (10) are, în general, p puncte confundate în P comune cu curba (1').

Deci, <u>orice dreaptă care trece printr-un punct multiplu de ordinul p al unei curbe intersectează curba în p puncte confundate în acesta</u>.

<u>Dacă dreapta (10) intersectează curba (1') în p+1 puncte confundate în P, atunci această dreaptă se numeşte tangentă la curba (1') în punctul singular P</u>.

Deci, pentru ca dreapta (10) să fie tangentă la curba (1'), trebuie ca ecuaţia (11) să admită de p+1 ori rădăcina $x=x_0$, adică

$$\frac{\partial^p F}{\partial x_0^p} + m\,C_p^1 \frac{\partial^p F}{\partial x_0^{p-1}\partial y_0} + \ldots + m^p \frac{\partial^p F}{\partial y_0^p} = 0. \qquad (12)$$

Această ecuaţie are p rădăcini reale sau complexe.

Rezultă că, <u>într-un punct multiplu de ordinul p, o curbă are p tangente reale sau imaginare</u>.

Să presupunem acum că punctul P este un punct dublu, adică x_0 şi y_0 satisfac sistemul (8) şi cel puţin o derivată parţială de ordinul doi este nenulă în acest punct.

Ecuaţia (12) se scrie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} m^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0} m + \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = 0.$$

Inlocuind aici valoarea lui m dată de (10), obţinem ecuaţia tangentelor la curba (1') în punctul P, şi anume

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2 = 0.$$

Pentru a determina natura acestor tangente, trebuie să considerăm discriminantul acestei ecuaţii, adică expresia

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \, \partial y_0} \right)^2 .$$

Dacă $\Delta < 0$, cele două tangente la curbă sînt reale şi distincte şi punctul se numeşte nod sau punct nodal.

Dacă $\Delta = 0$, cele două tangente sînt confundate şi punctul se numeşte punct de întoarcere sau punct cuspidal.

Dacă $\Delta > 0$, cele două tangente sînt imaginare şi punctul se numeşte punct singular izolat.

Forma curbei în vecinătatea unui punct dublu este arătată în figurile 4, 5, 6.

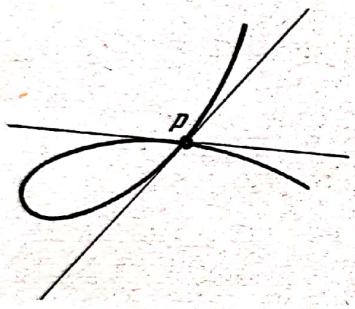
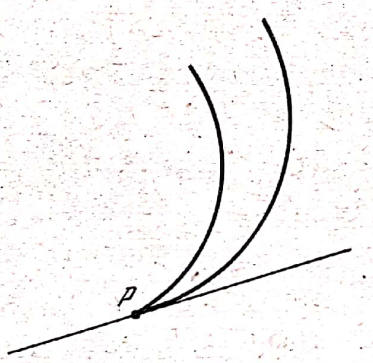


Fig.4



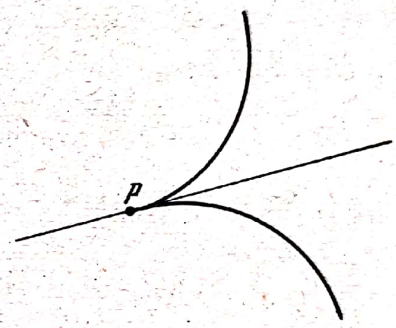


Fig.5

Să presupunem acum că curba (1') este o curbă algebrică. Vom considera întîi cazul unei conice. Fie deci

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = 0$$

ecuaţia unei conice.

Punctele singulare ale acestei conice sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33} = 0, \\ a_{11}x_0+a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

Fig.6

sau ale sistemului echivalent cu acesta

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Condiţia ca acest sistem să fie compatibil este

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

deci, <u>singurele conice care au puncte singulare sînt conicele degenerate</u>.

Vom considera acum o curbă algebrică de gradul trei sau o cubică.

Să presupunem că această curbă are două puncte duble, P_1 şi P_2. In acest caz, dreapta P_1P_2 are patru puncte comune cu cubica, şi anume două puncte confundate în P_1 şi două în P_2. Dar o dreaptă intersectează o cubică în trei puncte, deci dreapta P_1P_2 este conţinută în cubică, adică aceasta degenerează într-o dreaptă şi o conică, punctele P_1 şi P_2 fiind punctele de intersecţie ale dreptei cu conica.

Deci, <u>dacă o cubică are două puncte duble, ea degenerează într-o dreaptă şi o conică.</u>

Să vedem în ce caz cubica admite un punct triplu.

Fie P punctul triplu şi M_1, M_2, M_3 trei puncte ordinare ale cubicei, necoliniare.

Dreptele PM_1, PM_2 şi PM_3 au cîte patru puncte comune cu cubica, şi anume trei puncte confundate în punctul P şi unul din punctele M_1, M_2, respectiv M_3. Cele trei drepte sînt conţinute deci în cubica dată, care degenerează în aceste trei drepte.

Rezultă că, <u>dacă o cubică are un punct triplu, ea degenerează în trei drepte concurente în acest punct</u>.

Să demonstrăm acum următoarea teoremă generală:

Dacă o curbă algebrică (C_n) de gradul n are

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

puncte duble, atunci curba degenerează într-o curbă algebrică (C_{n-2}) de gradul n-2 şi o conică.

Într-adevăr, prin punctele duble ale curbei (C_n) şi prin $n-3$ puncte ordinare ale ei trece o curbă (C_{n-2}) de gradul $n-2$, căci

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1+n-3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2},$$

adică tocmai numărul de puncte necesar pentru determinarea unei curbe (C_{n-2}).

Curba (C_n) şi curba (C_{n-2}) au în comun cele $n-3$ puncte ordinare şi punctele duble, considerate de două ori, adică

$$(n-1)(n-2) + 2+n-3 = n(n-2) + 1.$$

Dar o curbă de gradul n intersectează o curbă de gradul $n-2$ în $n(n-2)$ puncte.

Rezultă că curba (C_{n-2}) este conţinută în curba (C_n), deci aceasta degenerează în curba (C_{n-2}) şi o conică.

Ca aplicaţie să considerăm cubica de ecuaţie

$$F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0. \qquad (13)$$

Avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y,$$

deci sistemul (8) care determină punctele singulare se scrie

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0, \quad 3x^2 + 2x = 0, \quad y = 0,$$

având soluţia $x_0 = y_0 = 0$.

Deci, cubica are un singur punct singular, şi anume originea axelor de coordonate.

Avem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} = -2,$$

deci ecuaţia tangentelor la cubică în origine este

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Rezultă că originea este un nod pentru cubica (13), tangentele la cubica în acest punct avînd ecuaţiile

$$x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

4. Puncte de inflexiune

Fie (C) o curbă a cărei ecuaţie este (1"), f fiind o funcţie care admite primele două derivate continue şi $M[x_0, f(x_0)]$ un punct ordinar al ei. Să notăm $P_1[x_0 - \varepsilon, f(x_0 - \varepsilon)]$, $P_2[x_0 + \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon)]$, ($\varepsilon > 0$), două puncte pe această curbă şi fie $P[x_0 + h, f(x_0 + h)]$.

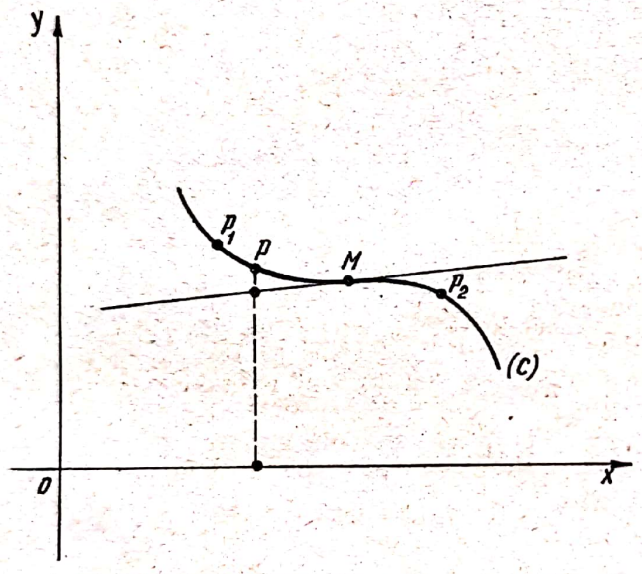


Fig.7

Să considerăm, de asemenea, tangenta la curba (C) în punctul M.

Dacă punctul P este de o parte a acestei tangente cînd $-\varepsilon \leq h < 0$ şi de cealaltă parte cînd $0 < h \leq \varepsilon$, atunci M se numeşte punct de inflexiune al curbei (C).

Ecuaţia tangentei la curbă în punctul M este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (14)$$

Să notăm cu y_c ordonata punctului P şi cu y_t ordonata punctului de intersecţie al tangentei în M la curbă cu perpendiculara coborîtă din P pe axa Ox.

Avem

$$y_c = f(x_0 + h)$$

sau, dezvoltînd funcţia f în seria Taylor şi mărginîndu-ne la primii trei termeni,

$$y_c = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0 + \theta h), \quad (0 < \theta < 1).$$

De asemenea, din formula (14) rezultă că

$$y_t = f(x_0) + hf'(x_0).$$

Deci

$$y_c - y_t = \frac{1}{2}h^2 f''(x_0 + \theta h). \qquad (15)$$

Pentru ca punctul M să fie un punct de inflexiune pentru curba (C), trebuie ca diferenţa $y_c - y_t$ să aibă un semn cînd punctul P este între P_1 şi M şi semn contrar cînd P este între M şi P_2, adică ţinînd seama de formula (15), trebuie ca f"(x) să-şi schimbe semnul cînd x trece prin valoarea x_0.

Dar funcţia f"(x) este continuă, deci pentru ca ea să-şi schimbe semnul cînd x trece prin valoarea x_0 trebuie ca

$$f''(x_0) = 0.$$

Deci, pentru ca punctul de abscisă x_0 să fie un punct de inflexiune pentru curba (C) trebuie ca $f''(x_0) = 0$, funcţia f"(x) schimbîndu-şi semnul cînd x trece prin valoarea x_0.

Tangenta la curbă într-un punct de inflexiune se numeşte tangentă inflexională.

Ca aplicaţie să determinăm punctele de inflexiune cu tangentele inflexionale ale cubicei

$$y = x^3 + x + 1.$$

Avem

$$y' = 3x^2 + 1, \qquad y'' = 6x.$$

Ecuaţia y" = 0 are rădăcina x = 0. Pentru x < 0 avem y" < 0, iar pentru x > 0 avem y" > 0, deci punctul M(0,1) este punct de inflexiune pentru cubică.

Ţinînd seama că y'(0) = 1, rezultă că ecuaţia tangentei inflexionale este

$$x - y + 1 = 0.$$

5. Asimptotele unei curbe plane

Fiind dată o curbă (C), o dreaptă d este o asimptotă a acestei curbe dacă distanţa de la un punct M al curbei (C) la dreapta d tinde la zero, cînd punctul M tinde la infinit (tangenta la curbă într-un punct de la infinit al curbei).

Să presupunem că curba (C) este dată prin ecuaţia (1")şi fie o dreaptă paralelă cu axa Oy de ecuaţie x=a. Distanţa de la punctul $M[x_0, f(x_0)]$ de pe curba (C) la dreaptă este

$$\delta = |x_0 - a| .$$

Pentru ca dreapta x=a să fie asimptotă la curba (C),trebuie ca $\delta \longrightarrow 0$ cînd $M \longrightarrow \infty$. De aici rezultă condiţia

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty .$$

Deci, dacă $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, dreapta x=a este o asimptotă a curbei (C), numită asimptotă verticală.

Să considerăm acum o dreaptă neparalelă cu axa Oy,deci a cărei ecuaţie este

$$y = mx + n \qquad (16)$$

şi să determinăm condiţia ca această dreaptă să fie asimptotă.

Fie M un punct pe curba (C), P proiecţia acestui punct pe dreapta (16) şi N punctul în care perpendiculara coborîtă din M pe axa Ox intersectează dreapta (16) (fig.8).

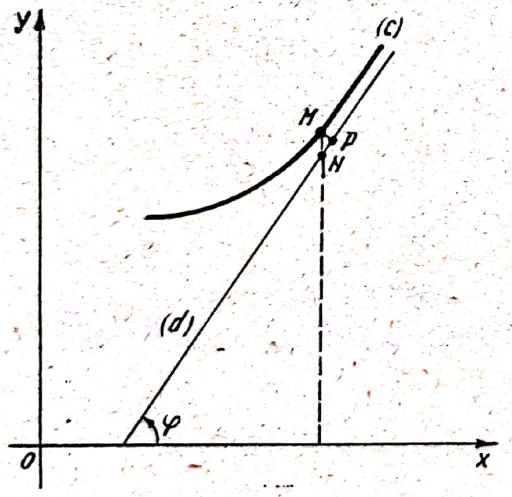


Fig.8

Dacă notăm cu φ unghiul dintre axa Ox şi dreapta (16),avem $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ şi

$$\overline{MP} = \overline{MN} \cos \varphi .$$

Rezultă că segmentele $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$ tind simultan către zero cînd M tinde către infinit,deci pentru ca dreapta (16) să fie asimptotă pentru curba (1"), este necesar şi suficient ca

$$\lim_{N \to \infty} \overline{MN} = 0.$$

Dacă notăm cu x_0 abscisa punctului M, atunci ordonata lui este $f(x_0)$, iar ordonata lui N este $mx_0 + n$, de unde deducem că

$$\overline{MN} = f(x_0) - mx_0 - n. \qquad (17)$$

Dacă notăm $MN = \ell$, din (17)avem

$$m = \frac{f(x_0)}{x_0} - \frac{n+\ell}{x_0},$$

deci, pentru ca dreapta (16) să fie asimptotă a curbei, este necesar ca

$$m = \lim_{x_0 \to \infty} \frac{f(x_0)}{x_0} - \lim_{x_0 \to \infty} \frac{n+\ell}{x_0}.$$

Dar n şi ℓ sînt cantităţi finite (cînd $x_0 \longrightarrow \infty$, $\ell \longrightarrow 0$), deci

$$\lim_{x_0 \to \infty} \frac{n+\ell}{x_0} = 0,$$

de unde deducem

$$m = \lim_{x_0 \to \infty} \frac{f(x_0)}{x_0}. \qquad (18)$$

Cu această valoare a lui m, din (17) obţinem

$$n = f(x_0) - mx_0 - \ell,$$

deci, pentru ca dreapta (16) să fie asimptotă, trebuie ca

$$n = \lim_{x_0 \to \infty} [f(x_0) - mx_0] - \lim_{x_0 \to \infty} \ell,$$

sau ţinînd seama că ultima limită este nulă,

$$n = \lim_{x_0 \to \infty} [f(x_0) - mx_0]. \qquad (18')$$

Rezultă că, dacă limitele (18) şi (18') există, dreapta (16) este asimptotă la curba (1'), m şi n fiind daţi de formulele (18), (18').

Ca aplicaţie să determinăm asimptotele curbei de ecuaţie

$$y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}. \qquad (19)$$

Ecuaţia x^2-3x+2 are rădăcinile $x_1=1$, $x_2=2$, deci

$$\lim_{x \to 1} y = \infty, \quad \lim_{x \to 2} y = \infty,$$

de unde rezultă că dreptele x=1 şi x=2 sînt asimptote verticale ale curbei (19).

Avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 1,$$

deci m=1.

De asemenea,

$$\lim_{x\to\infty}(y-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2-3x+2} - x\right) = 3,$$

adică n=3.

Rezultă că dreapta $y = x + 3$ este asimptotă la curba (19). Curba (19) are deci trei asimptote.

6. Lungimea unui arc de curbă

Fie AB un arc simplu al unei curbe ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad (a \leq u \leq b)$$

funcţiile x(u), y(u) fiind derivabile şi avînd derivata continuă.

Extremităţile A şi B ale arcului corespund valorilor a şi b ale parametrului.

Considerăm pe arcul AB punctele $A_1 = A, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n, A_{n+1}=B$ corespunzînd valorilor $u_1=a, u_2, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, u_{n+1}=b$ ale parametrului. Segmentele $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overline{A_nA_{n+1}}$, formează o linie poligonală înscrisă în arcul AB (fig.9).

Vom nota cu δ cea mai mare lungime a segmentelor $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Avem

$$\overline{A_iA_{i+1}} = \sqrt{\left[x(u_{i+1})-x(u_i)\right]^2 + \left[y(u_{i+1})-y(u_i)\right]^2}$$

sau

$$\overline{A_iA_{i+1}} = \sqrt{\left[\frac{x(u_{i+1})-x(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2 + \left[\frac{y(u_{i+1})-y(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2}(u_{i+1}-u_i). \quad (20)$$

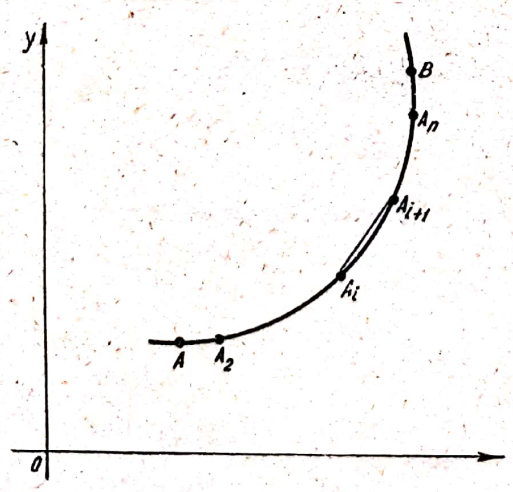


Fig.9

Dar funcţiile x(u) şi y(u) sînt derivabile, deci

$$\frac{x(u_{i+1})-x(u_i)}{u_{i+1}-u_i} = x'(u_i)+\mu_i,$$

unde μ_i tinde la zero cînd $u_{i+1} \longrightarrow u_i$ şi

$$\frac{y(u_{i+1})-y(u_i)}{u_{i+1}-u_i} = y'(u_i)+\nu_i$$

cu $\nu_i \longrightarrow 0$ cînd $u_{i+1} \longrightarrow u_i$.

Deducem

$$\sqrt{\left[\frac{x(u_{i+1})-x(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2+\left[\frac{y(u_{i+1})-y(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2}=\sqrt{\left[x'(u_i)+\mu_i\right]^2+\left[y'(u_i)+\nu_i\right]^2}$$

sau

$$\sqrt{\left[\frac{x(u_{i+1})-x(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2+\left[\frac{y(u_{i+1})-y(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\right]^2}=\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)+\varepsilon_i},$$

unde $\varepsilon_i \longrightarrow 0$ dacă $u_{i+1} \longrightarrow u_i$.

Relaţia (20) devine

$$\overline{A_iA_{i+1}}=\left[\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)+\varepsilon_i}\right](u_{i+1}-u_i).$$

De aici obţinem

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{A_iA_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)}(u_{i+1}-u_i)\right]+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{i+1}-u_i)$$

sau, notînd cu ℓ_n suma din membrul întîi,

$$\left|\ell_n-\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)}(u_{i+1}-u_i)\right]\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{i+1}-u_i)\right|. \qquad (21)$$

Dar $\varepsilon_i \longrightarrow 0$ cînd $u_{i+1} \longrightarrow u_i$, deci notînd

$$\varepsilon = \max_i (|\varepsilon_i|),$$

din (21) deducem

$$\left|\ell_n-\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)}(u_{i+1}-u_i)\right]\right| \leq \varepsilon(b-a). \qquad (22)$$

Să notăm cu γ cea mai mare dintre diferenţele $u_{i+1}-u_i$.

Dacă $\delta \longrightarrow 0$, avem $\gamma \longrightarrow 0$ şi reciproc.

Ţinînd seama de aceasta, din (22) deducem

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \ell_n = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \gamma\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{x'^2(u_i)+y'^2(u_i)}(u_{i+1}-u_i)\right]. \qquad (23)$$

Funcţiile $x'(u)$ şi $y'(u)$ sînt continue, deci funcţia $\sqrt{x'^2+y'^2}$ este integrabilă, iar limita din membrul doi al egalităţii (23) este tocmai

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}\,du.$$

Rezultă că $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \ell_n$ există. Vom numi această limită <u>lungimea arcului</u> AB şi o vom nota cu s. Avem deci

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du. \qquad (24)$$

Această formulă se mai poate scrie (pentru b = u)

$$ds = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du,$$

sau, avînd în vedere că $dx = x'du$, $dy = y'du$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

Vom numi diferenţiala ds, diferenţiala elementului de arc pe curbă.

Considerînd în loc de punctul B(b) punctul M(u), formula (24) ne dă lungimea arcului s în funcţie de parametrul u

$$s = F(u).$$

Ţinînd seama că într-un punct ordinar avem $F'(u) = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \neq 0$, rezultă că putem rezolva această relaţie în raport cu u,

$$u = \phi(s).$$

Inlocuind această valoare a parametrului u în ecuaţiile parametrice ale curbei, obţinem

$$x = X(s), \qquad y = Y(s),$$

deci putem totdeauna scrie ecuaţiile parametrice ale unei curbe în funcţie de arcul pe această curbă.

Dacă curba este dată prin ecuaţia explicită

$$y = f(x),$$

atunci relaţia (24) devine

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Să presupunem acum că curba este dată prin ecuaţia în coordonate polare

$$\rho = f(\theta).$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = f(\theta)\cos\theta,$$

$$y = f(\theta)\sin\theta.$$

Avem

$$x' = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,$$

$$y' = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

deci, punînd în loc de $f(\theta)$ şi $f'(\theta)$, respectiv ρ şi ρ', relaţia (24) se scrie

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta.$$

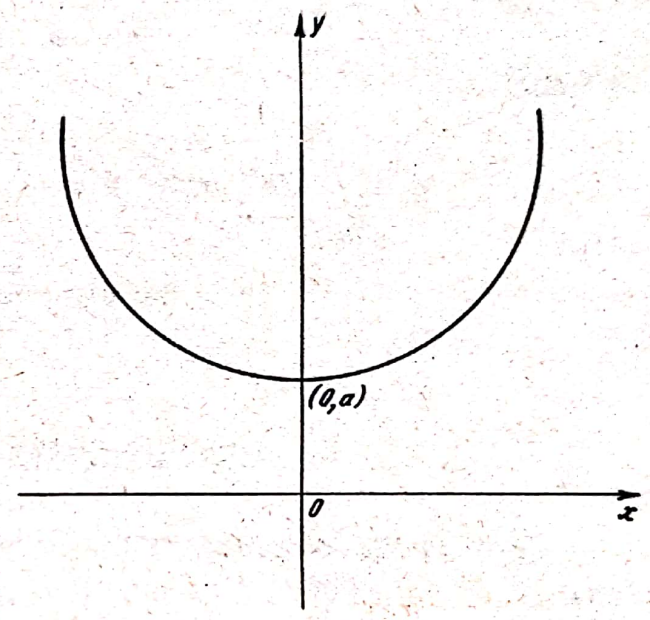


Fig.10

Ca aplicaţie să calculăm lungimea unui arc al lănţişorului (fig.10) şi al unui arc al cardioidei (fig.11).

Ecuaţia lănţişorului este

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Avem

$$y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a},$$

deci

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}\, dx.$$

Dar

$$1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a} = \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a},$$

adică

$$s = \int_0^x \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\, dx$$

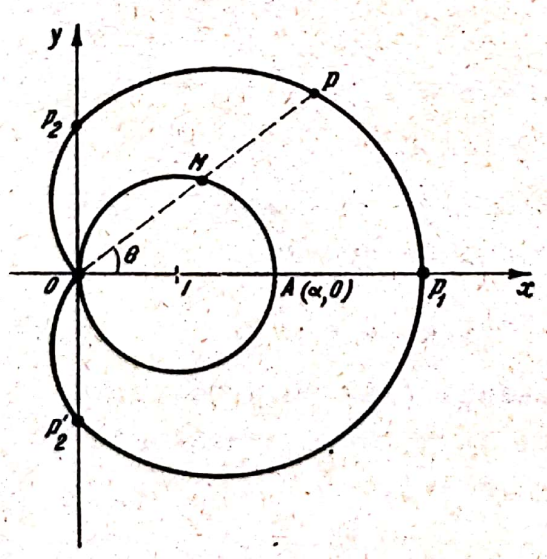


Fig.11

sau

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} .$$

Cardioida are ecuaţia în coordonate polare

$$\rho = a(1+\cos\theta).$$

Avem

$$\rho = -a \sin\theta,$$

de unde

$$s = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\, d\theta,$$

adică

$$s = 4a \sin \frac{\theta}{2} .$$

7. Cerc osculator. Curbură

Considerăm o curbă (C) ale cărei ecuaţii parametrice sînt:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \tag{25}$$

funcţiile $x(u)$ şi $y(u)$ avînd derivate de primele două ordine.

Dacă $M(u_0)$ este un punct al acestei curbe, un cerc se numeşte <u>cerc osculator</u> al curbei (C) în punctul M, dacă are cu curba trei puncte confundate în M.

Fie

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \tag{26}$$

ecuaţia cercului.

Abscisele curbilinii ale punctelor de intersecţie ale cercului (26) cu curba (25) sînt soluţiile ecuaţiei.

$$[x(u)]^2 + [y(u)]^2 - 2ax(u) - 2by(u) + c = 0. \tag{27}$$

Dacă punem aici $u = u_0 + h$, cercul (26) intersectează curba (25) în trei puncte confundate în M, dacă ecuaţia în h astfel obţinută are rădăcina triplă $h = 0$.

Avem

$$x(u_0+h) = x(u_0) + hx'(u_0) + \frac{h^2}{2!} x''(u_0) + \ldots,$$

$$y(u_0+h) = y(u_0) + hy'(u_0) + \frac{h^2}{2!} y''(u_0) + \dots$$

Cu aceste valori, ecuaţia (27) devine

$$x^2+y^2-2ax-2by+c+2h(xx'+yy'-ax'-by') +$$

$$+ h^2(xx''+x'^2+yy''+y'^2-ax''-by'')+\dots = 0,$$

termenii nescrişi avîndu-l în factor pe h^3. Această ecuaţie admite rădăcina triplă $h = 0$, dacă

$$\begin{cases} x''a + y''b = xx'' + x'^2 + yy'' + y'^2, \\ x'a + y'b = xx' + yy', \\ 2xa + 2yb - c = x^2 + y^2. \end{cases}$$

De aici deducem

$$\begin{cases} a = x + \dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{x''y'-x'y''}, \\ b = y - \dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x''y'-x'y''}, \\ c = x^2+y^2+\dfrac{2(xy'-x'y)(x'^2+y'^2)}{x''y'-x'y''}. \end{cases}$$

Dacă notăm cu X şi Y coordonatele centrului Ω al cercului osculator al curbei (25) şi cu R raza lui, avem deci

$$X = x + \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x''y'-x'y''},$$

$$Y = y - \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x''y'-x'y''},$$

$$R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x''y'-x'y''|}.$$

Punctul Ω se numeşte <u>centrul de curbură</u> al curbei (C) în punctul M, iar R <u>raza de curbură</u> a acestei curbe.

Ţinînd seama că parametrii directori ai normalei la curbă în punctul M sînt $y', -x'$, rezultă că centrul de curbură Ω se află pe normala la curbă în punctul respectiv şi avem $R = \overline{M\Omega}$.

Dacă curba (C) este dată prin ecuaţia explicită

$$y = f(x),$$

formulele care ne dau coordonatele centrului şi raza de curbură devin

$$X = x - \frac{f'(x)\,[1+f'^2(x)]}{f''(x)},$$

$$Y = f(x) + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)},$$

$$R = \frac{[1+f'^2(x)]^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

Dacă curba (C) este dată prin ecuaţia în coordonate polare

$$\rho = f(\theta),$$

avem

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta,$$

şi expresia razei de curbură este

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Expresia $\frac{1}{R}$ se numeşte <u>curbura</u> curbei (C) în punctul M.

Să presupunem acum că parametrul pe curba (C) este arcul s, deci ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = x(s), \qquad y = y(s). \tag{25'}$$

Ţinînd seama că

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

rezultă că

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \tag{28}$$

deci

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}$$

sînt cosinusurile directoare ale tangentei la curbă.

In acest caz, formula care ne dă curbura curbei devine

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}\right|.$$

Ridicînd la pătrat această egalitate, obţinem

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 2\,\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 . \quad (29)$$

Derivînd relaţia (28) în raport cu s, găsim

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds} = 0 .$$

Ridicînd şi această relaţie la pătrat şi adunînd-o la (29), obţinem

$$\frac{1}{R^2} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]$$

sau, ţinînd seama de (28),

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 . \quad (30)$$

Fie acum pe curba (C) două puncte M(s) şi M'(s') şi tangentele la curbă în aceste puncte (t), respectiv (t'). Unghiul dintre dreptele (t) şi (t') se numeşte <u>unghiul de contingenţă</u>. Notăm acest unghi cu ε. Lungimea arcului MM' este $|s'-s|$.

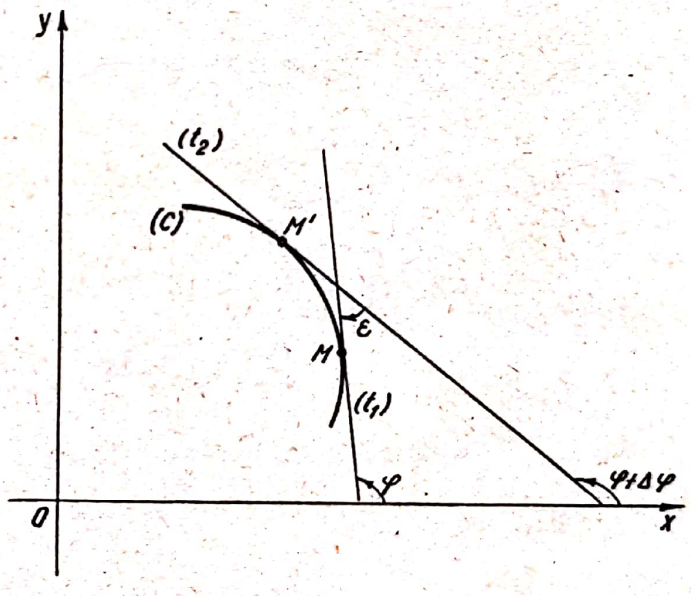


Fig.12

Să demonstrăm teorema[1]

<u>Limita raportului dintre unghiul de contingenţă al tangentelor în două puncte la o curbă şi lungimea arcului determinat de aceste puncte, cînd cele două puncte tind unul către celălalt, este curbura curbei în punctul respectiv</u> .

[1] Proprietatea cuprinsă în această teoremă poate fi luată ca definiţie a curburii unei curbe plane.

Dacă punem $s' = s + \Delta s$ şi dacă notăm unghiul făcut de dreapta (t) cu axa Ox cu φ, iar unghiul făcut de dreapta (t') cu axa Ox cu $\varphi + \Delta\varphi$, avem $\varepsilon = \Delta\varphi$.

Deci

$$\frac{\varepsilon}{|s'-s|} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

adică

$$\lim_{s' \to s} \frac{\varepsilon}{|s'-s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \qquad (31)$$

Dar cosinusurile directoare ale tangentei la curbă sînt $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, de unde rezultă

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{ds}. \qquad (32)$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu s, găsim

$$-\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}. \qquad (32')$$

Ridicînd la pătrat aceste egalităţi şi adunîndu-le, obţinem

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Ţinînd seama aici de relaţiile (30) şi (31), deducem

$$\lim_{s' \to s} \frac{\varepsilon}{|s'-s|} = \frac{1}{R},$$

formulă care se mai poate scrie

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}. \qquad (33)$$

Să determinăm acum curbura unei drepte.

Ecuaţia explicită a unei drepte este

$$y = mx + n,$$

deci $y''=0$ şi, ţinînd seama de expresia curburii unei curbe date prin ecuaţia explicită, obţinem

$$\frac{1}{R} = 0.$$

Reciproca acestei proprietăţi este imediată. Intr-adevăr, dacă $\frac{1}{R} = 0$, rezultă

$$\frac{y''(x)}{1 + \left[y'^2(x)\right]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

adică $y''(x) = 0$, de unde deducem

$$y = mx + n.$$

Deci, <u>singurele curbe plane care au curbura nulă sînt dreptele şi reciproc.</u>

In cazul unui cerc avem ecuaţiile parametrice

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = b + r\sin\theta,$$

deci

$$x' = -r\sin\theta, \qquad y' = r\cos\theta,$$

$$x'' = -r\cos\theta, \qquad y'' = -r\sin\theta.$$

Rezultă că raza de curbură a cercului este

$$R = r.$$

<u>Reciproca</u> acestei proprietăţi o vom demonstra în paragraful următor.

Să notăm acum cu α_1, β_1 cosinusurile directoare ale normalei la curba (25') în punctul M(s).

Unghiul pe care normala la curbă îl face cu axa Ox este $\frac{\pi}{2} + \varphi$, deci

$$\alpha_1 = -\sin\varphi, \qquad \beta_1 = \cos\varphi.$$

Cu aceasta, formulele (31), (32), (33) se scriu

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}. \tag{34}$$

Analog avem

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{\alpha}{R}, \qquad \frac{d\beta_1}{ds} = \frac{\beta}{R}. \tag{34'}$$

Formulele (34) şi (34') se numesc <u>formulele lui Frenet</u> pentru o curbă plană.

Ca aplicaţie să determinăm raza de curbură a lănţişorului. Ecuaţia lănţişorului este

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Avem

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}, \qquad y'' = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

deci

$$R = \frac{(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}.$$

8. Ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane

Am văzut în paragraful precedent cum, fiind dată o curbă plană, putem să-i determinăm raza de curbură. In acest paragraf vom arăta cum, plecînd de la expresia razei de curbură a unei curbe plane în funcţie de arcul s, putem determina curba.

Ecuaţia

$$R = F(s) \tag{35}$$

se numeşte ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane.

Din formula (33) rezultă

$$d\varphi = \frac{ds}{F(s)},$$

de unde, prin integrare, deducem

$$\varphi = \int\frac{ds}{F(s)} + \varphi_0, \qquad (\varphi_0 = \text{const.})$$

sau, notînd

$$\int\frac{ds}{F(s)} = f(s),$$

$$\varphi = f(s) + \varphi_0.$$

Inlocuind această valoare în prima ecuaţie (32), găsim

$$dx = \cos\left[f(s) + \varphi_0\right] ds,$$

adică

$$dx = \cos\varphi_0 \cos f(s)\, ds - \sin\varphi_0 \sin f(s)\, ds.$$

Integrînd această ecuaţie, obţinem

$$x=\cos\varphi_0\int\cos f(s)ds-\sin\varphi_0\int\sin f(s)ds+x_0, \quad (x_0=\text{const.}).$$

Analog, din a doua ecuaţie (32) deducem

$$y=\sin\varphi_0\int\cos f(s)ds-\cos\varphi_0\int\sin f(s)ds+y_0, \quad (y_0=\text{const.}).$$

Notînd

$$X(s)=\int\cos f(s)ds, \qquad Y(s)=\int\sin f(s)ds, \tag{36}$$

avem

$$\begin{cases} x = X(s)\cos\varphi_0 - Y(s)\sin\varphi_0 + x_0, \\ y = X(s)\sin\varphi_0 + Y(s)\sin\varphi_0 + y_0. \end{cases} \tag{37}$$

Ecuaţiile (37) sînt ecuaţiile parametrice ale curbei căutate.

In aceste ecuaţii intervin trei constante arbitrare, deci avem o familie de ∞^3 curbe plane care satisfac problema noastră.

Dacă notăm

$$X = X(s), \qquad Y = Y(s), \tag{38}$$

curba care are aceste ecuaţii parametrice este unic determinată.

Curbele familiei (37) se deduc din curba (38) printr-o transformare ortogonală (rotaţie şi translaţie).

Avem deci teorema:

<u>Ecuaţia intrinsecă determină curba plană, abstracţie făcînd de o transformare ortogonală.</u>

Să determinăm acum curbele plane care au raza de curbură constantă (reciproca proprietăţii din paragraful precedent).

Ecuaţia intrinsecă este

$$R = r \quad (r = \text{const.}).$$

Din ecuaţia (33) deducem

$$ds = r\,d\varphi .$$

Cu această valoare, ecuaţiile (32) se scriu

$$dx = r\cos\varphi\,d\varphi, \qquad dy = r\sin\varphi\,d\varphi,$$

de unde, integrînd, găsim

$$x = a + r \sin\varphi \ , \qquad y = b - r \cos\varphi \ , \quad (a,b=\text{const.}),$$

adică

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 .$$

Avem deci teorema:

Curbele plane care au curbura constantă sînt cercuri.

Ca aplicaţie să determinăm curbele plane care au ecuaţia intrinsecă

$$R = \frac{a^2 + s^2}{a} . \tag{39}$$

Ecuaţia (33) se scrie

$$d\varphi = \frac{a\,ds}{a^2+s^2} ,$$

de unde, prin integrare, găsim

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{a} + \varphi_0 .$$

Neglijînd constanta arbitrară φ_0, ceea ce revine la o rotaţie în jurul originii, avem

$$s = a \operatorname{tg}\varphi .$$

Ecuaţiile (32) se scriu

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\cos\varphi} , \qquad dy = \frac{a \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi ,$$

de unde, prin integrare, găsim

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + x_0 , \\ y = \frac{a}{\cos\varphi} + y_0 . \end{cases}$$

Neglijînd constantele arbitrare x_0, y_0, ceea ce revine la o translaţie, ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$x = \frac{a}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} , \qquad y = \frac{a}{\cos\varphi} .$$

Din prima ecuaţie deducem

$$\sin\varphi = \frac{e^{\frac{2x}{a}} - 1}{e^{\frac{2x}{a}} + 1} ,$$

iar din a doua

$$\cos \varphi = \frac{a}{y} ,$$

deci ecuaţia explicită a curbei este

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

sau

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} , \qquad (40)$$

adică ecuaţia lănţişorului.

Rezultă că: curbele care au ecuaţia intrinsecă (39) sînt curbe deduse din lănţişorul (40) printr-o transformare ortogonală.

9. Înfăşurătoarea unei familii de curbe

Să considerăm o familie de curbe de ecuaţie

$$F(x,y,\lambda) = 0, \qquad (41)$$

unde λ este un parametru variabil.

Vom presupune că $F'_\lambda(x,y,\lambda)$ nu este identic nulă, căci în caz contrar funcţia $F(x,y,\lambda)$ nu ar conţine parametrul λ, deci ecuaţia (41) nu ar reprezenta o familie de curbe.

Dacă există o curbă (Γ) care să fie tangentă la toate curbele familiei (41), această curbă se numeşte înfăşurătoarea familiei (41).

Fie (C_λ) curba din familia (41) corespunzătoare valorii λ a parametrului. Notăm cu P punctul de contact al curbei (C_λ) cu înfăşurătoarea (Γ) şi numim acest punct punctul caracteristic al curbei (C_λ). Presupunem că P este punct ordinar pentru curbele (C_λ) şi (Γ). Coordonatele punctului P sînt funcţii de parametrul λ, adică

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda). \qquad (42)$$

Cînd variază parametrul λ, punctul P descrie curba (Γ), deci ecuaţiile (42) sînt ecuaţiile înfăşurătorii familiei de curbe (41).

Punctul P se află pe curba (C_λ), deci avem

$$F[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0. \tag{43}$$

Ecuaţia tangentei la curba (C_λ) este

$$F'_x(x,y,\lambda)(X-x)+F'_y(x,y,\lambda)(Y-y)=0, \tag{44}$$

unde am notat cu X, Y coordonatele unui punct curent din plan.

Tangenta la curba (Γ) în punctul corespunzător valorii lui λ, considerată pe curba (C_λ), are ecuaţia

$$\frac{X-x}{x'(\lambda)} = \frac{Y-y}{y'(\lambda)}.$$

Pentru ca această dreaptă să coincidă cu dreapta (44), trebuie ca

$$F'_x(x,y,\lambda)x'(\lambda)+F'_y(x,y,\lambda)y'(\lambda) = 0. \tag{45}$$

Derivînd relaţia (43) în raport cu λ, obţinem

$$F'_x(x,y,\lambda)x'(\lambda)+F'_y(x,y,\lambda)y'(\lambda)+F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0.$$

Ţinînd seama aici de ecuaţia (45), rezultă

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0. \tag{46}$$

Deci, pentru ca curba (Γ) să fie tangentă la curba (C_λ) în punctul P, trebuie ca coordonatele acestui punct să verifice ecuaţia (46).

Rezultă că, dacă curbele familiei (41) au numai puncte ordinare, înfăşurătoarea acestei familii este determinată de ecuaţiile (41), (46).

Să demonstrăm acum că condiţia ca familia de curbe (41) să admită o înfăşurătoare este ca să fie verificate relaţi - ile

$$\frac{D(F,F'_\lambda)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F'_{\lambda x} & F'_{\lambda y} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{47}$$

$$F''^2_\lambda(x,y,\lambda) \neq 0. \tag{47'}$$

Intr-adevăr, dacă relaţia (47) este satisfăcută, atunci cel puţin una din derivatele parţiale F'_x, F'_y este nenulă, deci

punctele curbelor (C_λ) sînt ordinare. Dacă relaţia (47') este verificată, ecuaţia (46) conţine efectiv parametrul λ.

In sfîrşit, relaţia (47) ne dă posibilitatea să rezolvăm sistemul (41), (46) în raport cu x,y.

Să presupunem acum că curba (C_λ) admite puncte singulare şi să aflăm locul geometric al acestor puncte cînt λ variază.

Fie M(x,y) un punct singular al curbei (C_λ). Avem

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda).$$

Punctul M fiind singular,

$$F'_x(x,y,\lambda) = F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0. \tag{48}$$

Dar punctul M se află pe curba (C_λ), deci

$$F\left[x(\lambda), y(\lambda), \lambda\right] = 0.$$

Derivînd această relaţie în raport cu λ, obţinem

$$F'_x(x,y,\lambda)\cdot x'(\lambda)+F'_y(x,y,\lambda)\cdot y'(\lambda)+F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0$$

sau, ţinînd seama de ecuaţiile (48),

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0.$$

Deci, coordonatele punctelor singulare ale curbelor (C_λ) verifică ecuaţiile (41), (46).

Rezultă că <u>ecuaţiile (41), (46) reprezintă înfăşurătoarea familiei de curbe (41) şi locul geometric al punctelor singulare ale acestor curbe</u>.

Să arătăm acum că curbele (C_λ) şi $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$ se intersectează într-un punct caracteristic, cînd $\Delta\lambda \to 0$.

Intr-adevăr, ecuaţia curbei $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$ este

$$F(x,y,\lambda+\Delta\lambda) = 0. \tag{49}$$

Punctele de intersecţie ale curbelor (C_λ) şi $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$ sînt soluţiile sistemului (41), (49) sau ale sistemului echivalent

$$F(x,y,\lambda) = 0,$$

$$\frac{F(x,y,\lambda+\Delta\lambda)-F(x,y,\lambda)}{\Delta\lambda} = 0.$$

Cînd $\Delta\lambda \longrightarrow 0$, acest sistem devine tocmai sistemul (41), (46), deci punctele de intersecţie ale curbelor (C_λ), $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$,

cînd $\Delta\lambda \longrightarrow 0$, sînt puncte caracteristice ale familiei (41).

Ca aplicaţie să determinăm înfăşurătoarea familiei de drepte

$$\lambda x - \lambda^2 y - 1 = 0.$$

Derivînd această ecuaţie în raport cu λ, obţinem

$$x - 2\lambda y = 0,$$

de unde

$$\lambda = \frac{x}{2y}.$$

Inlocuind această valoare în ecuaţia familiei, găsim ecuaţia înfăşurătorii căutate

$$x^2 = 4y,$$

care este ecuaţia unei paralele cu vîrful în origine şi avînd ca axă pe Oy.

10. Evoluta şi evolventa unei curbe plane

Fiind dată o curbă plană, care nu este o dreaptă, locul geometric al centrilor de curbură ai ei este o altă curbă, numită evoluta (desfăşurata) curbei date.

Fie

$$x = x(u), \qquad y = y(u) \tag{50}$$

ecuaţiile parametrice ale curbei date.

Centrul de curbură Ω al acestei curbe în punctul $M(u)$ are coordonatele

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{x''y' - x'y''}, \\ Y = y - \dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x''y' - x'y''}. \end{cases} \tag{51}$$

Cînd u variază, punctul M descrie curba (50), iar punctul Ω evoluta acestei curbe, ale cărei ecuaţii parametrice sînt deci ecuaţiile (51).

Să demonstrăm următoarea teoremă:

Evoluta unei curbe este înfăşurătoarea normalelor la această curbă.

Intr-adevăr, să scriem ecuaţia normalei la curba (50) în punctul M,

$$x'(X-x) + y'(Y-y) = 0. \qquad (52)$$

Pentru a determina înfăşurătoarea acestei familii de drepte, să scriem ecuaţia obţinută prin derivarea ecuaţiei (52) în raport cu u. Obţinem

$$x''(X-x) + y''(Y-y) = x'^2 + y'^2 .$$

Rezolvînd sistemul determinat de aceste două ecuaţii, deducem ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii familiei normalelor care sînt tocmai ecuaţiile (51) ale evolutei.

Ca aplicaţie să găsim evoluta elipsei. Ecuaţiile parametrice ale elipsei sînt

$$x=a\cos u, \qquad y=b\sin u.$$

Cu aceste valori, ecuaţiile (51) devin

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 u,$$

$$y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 u, \quad (c^2=a^2-b^2).$$

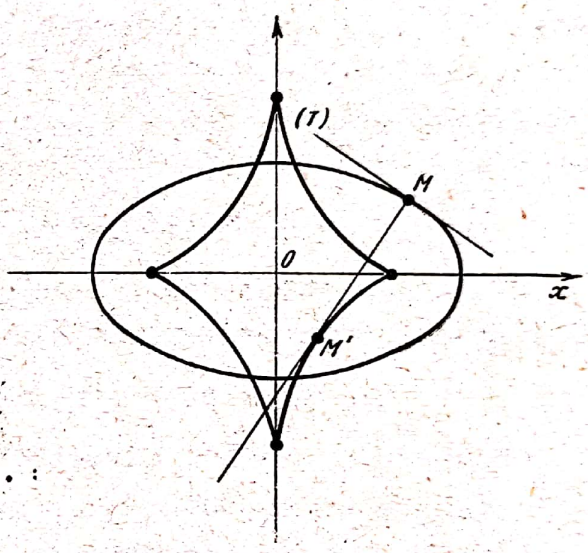


Fig.13

Eliminînd pe u între aceste relaţii, obţinem ecuaţia implicită a evolutei

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

care este o astroidă alungită (fig.13).

Cu ajutorul noţiunii de evolută vom determina acum expresia razei de curbură a unei curbe plane în funcţie de distanţa de la origine a axelor de coordonate la tangenta la curbă.

Fie o curbă plană (C) şi tangenta (t) la această curbă de ecuaţie

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p(\varphi) = 0, \qquad (53)$$

unde φ este unghiul dintre axa Ox şi normala la curbă, iar p distanţa de la origine la tangentă.

Putem considera curba (C) ca fiind înfăşurătoarea familiei de drepte (53). Derivînd ecuaţia, obţinem

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p'(\varphi) = 0, \qquad (53')$$

care, împreună cu ecuaţia (53), defineşte curba (C).

Rezolvînd sistemul (53), (53'), obţinem punctul curent al curbei (C),

$$M(p\cos\varphi - p'\sin\varphi,\ p\sin\varphi + p'\cos\varphi).$$

Ecuaţia (53) reprezintă o dreaptă perpendiculară pe tangenta la curbă, deci este normala la curbă.

Înfăşurătoarea familiei de drepte (53') este deci evoluta curbei (C), pe care o vom nota cu (Γ). Pentru a obţine ecuaţiile parametrice ale curbei (Γ), trebuie să rezolvăm sistemul format din ecuaţia (53') şi ecuaţia obţinută prin derivarea acesteia în raport cu φ,

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi - p''(\varphi) = 0. \qquad (53'')$$

Obţinem astfel coordonatele punctului curent al curbei (Γ), care este tocmai centrul de curbură al curbei (C) în punctul M

$$\Omega(-p'\sin\varphi - p''\cos\varphi,\ p'\cos\varphi - p''\sin\varphi).$$

Raza de curbură a curbei (C) în punctul M este $R = \overline{M\Omega}$.

Dreapta (53'') este o dreaptă paralelă cu dreapta (53) dusă prin Ω. Dacă ducem dreapta OP perpendiculară pe dreapta (53) în punctul P şi notăm cu P_2 intersecţia acestei drepte cu dreapta (53''), avem

$$\overline{OP} = p, \qquad \overline{OP}_2 = -p''.$$

Pe de altă parte, avem

$$\overline{M\Omega} = \overline{PP}_2 = \overline{OP}_2 - \overline{OP} = -(p+p''),$$

deci raza de curbură căutată este

$$R = -(p+p'').$$

<u>Fiind dată o curbă (Γ), o curbă (C) a cărei evoluată este curba (Γ), se numeşte evolventa</u> (<u>desfăşurătoarea</u>) <u>curbei (Γ)</u>.

Să presupunem că am ales ca parametru pe curba (Γ) arcul acestei curbe şi că ecuaţiile ei parametrice sînt

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

De asemenea să notăm cu

$$X = X(s), \qquad Y = Y(s)$$

ecuaţiile parametrice ale curbei (C).

Curba (Γ) fiind evoluta curbei (C), rezultă că normala la curba (C) este tangentă la curba (Γ), deci tangenta la curba (Γ) este perpendiculară pe tangenta la curba (C).

Ecuaţia tangentei la curba (Γ) este

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}$$

sau, notînd cu $\rho(s)$ valoarea comună a rapoartelor,

$$X = x + \rho x', \qquad Y = y + \rho y'. \qquad (54)$$

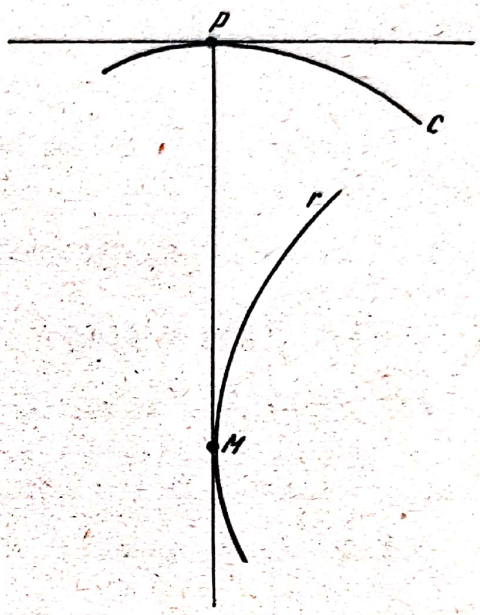


Fig.14

Dar tangenta la curba (C) are parametrii directori $X'(s)$, $Y'(s)$, deci condiţia ca tangenta la (Γ) să fie perpendiculară pe tangenta la (C) este

$$X'(s)x'(s)+Y'(s)y'(s) = 0.$$

Inlocuind aici pe X şi Y cu valorile date de (54), obţinem

$$(x'^2 + y'^2)(\rho'+1) + \rho(x'x''+y'y'') = 0. \qquad (55)$$

Dar $x'^2+y'^2 = 1$ şi deci

$$x'x'' + y'y'' = 0.$$

Cu aceste valori, ecuaţia (55) devine

$$\rho' = -1,$$

adică

$$\rho = -s + k, \qquad (k = \text{const.}).$$

Inlocuind această valoare a lui ρ în (54), obţinem ecuaţiile parametrice ale evolventei

$$X = x + x'(k-s), \qquad Y = y + y'(k-s).$$

Deci, <u>o curbă plană are o infinitate de evolvente</u>.

Ca aplicaţie să determinăm evolventa unui cerc cu centrul în origine. Ecuaţiile parametrice ale acestui cerc sînt

$$x = R\cos u, \qquad y = R\sin u.$$

Elementul de arc pe această curbă este

$$ds = R\,du,$$

de unde obţinem

$$s = Ru.$$

Astfel, ecuaţiile parametrice ale cercului în funcţie de arcul s sînt

$$x = R\cos\frac{s}{R}, \qquad y = R\sin\frac{s}{R}.$$

Ecuaţiile parametrice ale evolventei cercului vor fi

$$X = R\cos\frac{s}{R} - (k-s)\sin\frac{s}{R}, \qquad Y = R\sin\frac{s}{R} + (k-s)\cos\frac{s}{R},$$

sau, revenind la parametrul u,

$$X = R\cos u - (k-Ru)\sin u, \qquad Y = R\sin u + (k-Ru)\cos u.$$

11. Contactul a două curbe plane

Să considerăm două curbe (C_1) şi (C_2) care sînt tangente în punctul M_0, acesta fiind punct ordinar pentru ambele curbe. Luăm pe curbele (C_1) şi (C_2) punctele M_1, respectiv M_2, de aceeaşi parte a normalei la cele două curbe în M_0, astfel încît

$$\text{arc } M_0M_1 = \text{arc } M_0M_2.$$

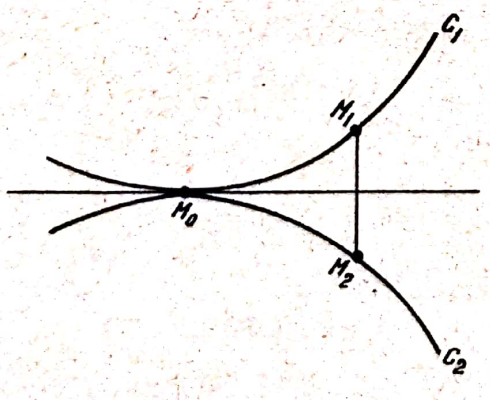


Fig.15

Pe cele două curbe luăm acelaşi parametru, şi anume $s = \text{arc } M_0M_1$.

Ecuaţiile parametrice ale celor două curbe vor fi

$$(C_1): \quad x = x_1(s), \quad y = y_1(s),$$

$$(C_2): \quad x = x_2(s), \quad y = y_2(s),$$

punctul M_0 obţinîndu-se pentru $s = 0$.

Spunem că cele două curbe au în punctul M_0 un contact de ordinul n, dacă limita

$$\lim_{s \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}}$$

este finită și nenulă.

Să determinăm condițiile pentru ca curbele (C_1) și (C_2) să aibă în M un contact de ordinul n.

Punctul M_0 fiind comun celor două curbe, avem

$$x_1(0) = x_2(0), \qquad y_1(0) = y_2(0). \tag{56}$$

De asemenea, ținînd seama că cele două curbe au aceeași tangentă în punctul M_0, rezultă că

$$x_1'(0) = x_2'(0), \qquad y_1'(0) = y_2'(0). \tag{56'}$$

Avînd în vedere relațiile (56), (56'), dezvoltările în serie Taylor în jurul punctului s=0 ale funcțiilor $x_1(s)$, $x_2(s)$, $y_1(s)$, $y_2(s)$ sînt

$$x_1(s) = x_1(0) + \frac{s}{1!} x_1'(0) + \frac{s^2}{2!} x_1''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!} x_1^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \left[x_1^{(n+1)}(0) + \varepsilon_1 \right],$$

$$x_2(s) = x_1(0) + \frac{s}{1!} x_1'(0) + \frac{s^2}{2!} x_2''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!} x_2^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \left[x_2^{(n+1)}(0) + \varepsilon_2 \right],$$

$$y_1(s) = y_1(0) + \frac{s}{1!} y_1(0) + \frac{s^2}{2!} y_1''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!} y_1^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \left[y_1^{(n+1)}(0) + \eta_1 \right],$$

$$y_2(s) = y_1(0) + \frac{s}{1!} y_1'(0) + \frac{s^2}{2!} y_2''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!} y_2^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \left[y_2^{(n+1)}(0) + \eta_2 \right],$$

unde ε_1, ε_2, η_1, η_2 tind către zero cînd $s \longrightarrow 0$.

De aici rezultă că

$$x_1(s) - x_2(s) = \frac{s^2}{2!}\left[x_1''(0) - x_2''(0)\right] + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!}\left[x_1^{(n)}(0) - x_2^{(n)}(0)\right] + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right],$$

$$y_1(s) - y_2(s) = \frac{s^2}{2!}\left[y_1''(0) - y_2''(0)\right] + \dots$$

$$\dots + \frac{s^n}{n!}\left[y_1^{(n)}(0) - y_2^{(n)}(0)\right] + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0) + \eta_1 - \eta_2\right],$$

Să presupunem acum că

$$x_1''(0) = x_2''(0), \dots, x_1^{(n)}(0) = x_2^{(n)}(0),$$

$$y_1''(0) = y_2''(0), \dots, y_1^{(n)}(0) = y_2^{(n)}(0), \qquad (57)$$

$$\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0)\right]^2 + \left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0)\right]^2 \neq 0.$$

In acestcaz avem

$$x_1(s) - x_2(s) = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right],$$

$$y_1(s) - y_2(s) = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0) + \eta_1 - \eta_2\right],$$

de unde deducem

$$\overline{M_1M_2} = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\sqrt{\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right]^2 + \left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0) + \eta_1 - \eta_2\right]^2}.$$

Rezultă că

$$\lim_{s \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\sqrt{\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0)\right]^2 + \left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0)\right]^2}$$

şi, avînd în vedere relaţia (57)

$$\lim_{s \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}} \neq 0,$$

deci contactul dintre cele două curbe este de ordinul n.

Dacă

$$x_1''(0) = x_2''(0), \ldots, x_1^{(p)}(0) = x_2^{(p)}(0),$$

$$y_1''(0) = y_2''(0), \ldots, y_1^{(p)}(0) = y_2^{(p)}(0),$$

$$\left[x_1^{(p+1)}(0) - x_2^{(p+1)}(0)\right]^2 + \left[y_1^{(p+1)}(0) - y_2^{(p+1)}(0)\right]^2 \neq 0,$$

atunci contactul dintre curbele (C_1) şi (C_2) este de ordinul p.

Rezultă teorema:

Condiţia necesară şi suficientă ca curbele (C_1) şi (C_2) să aibă un contact de ordinul n în punctul M(s=0) este ca

$$x_1(0) = x_2(0), \quad x_1'(0) = x_2'(0), \ldots, x_1^{(n)}(0) = x_2^{(n)}(0),$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1'(0) = y_2'(0), \ldots, y_1^{(n)}(0) = y_2^{(n)}(0),$$

$$\left[x_1^{(n+1)}(0) - x_2^{(n+1)}(0)\right]^2 + \left[y_1^{(n+1)}(0) - y_2^{(n+1)}(0)\right]^2 \neq 0 .$$

Să demonstrăm acum următoarea proprietate:

Tangenta la o curbă plană într-un punct ordinar care nu este de inflexiune are cu aceasta un contact de ordinul întîi, iar cercul osculator la curbă într-un punct ordinar are cu ea un contact de ordinul doi.

Intr-adevăr, să considerăm curba (C) de ecuaţie

$$y = f(x) .$$

Tangenta la curba (C) în punctul $M[x_0, f(x_0)]$ este definită de ecuaţia

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

sau de ecuaţiile parametrice

$$x = u, \quad y = f'(x_0)u + f(x_0) - x_0\, f'(x_0).$$

Calculînd arcul s pe această dreaptă, obţinem

$$s = u\sqrt{1 + f'^2(x_0)} .$$

Deci, ecuaţiile parametrice ale tangentei se scriu

$$x = \frac{s}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}, \qquad y = \frac{sf'(x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}} + f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei (C) se pot scrie

$$x = \frac{s}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}, \qquad y = f\left(\frac{s}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}\right).$$

In punctul M avem

$$s_0 = x_0\sqrt{1 + f'^2(x_0)}\ .$$

Notînd cu $y_1(s)$ şi $y_2(s)$ expresiile lui y din ecuaţiile parametrice ale tangentei, respectiv ale curbei (C), rezultă

$$y_1(s_0)=f(x_0), \quad y_1'(s_0)= \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}, \quad y_1''(s_0) = 0,$$

$$y_2(s_0)=f(x_0), \quad y_2'(s_0)= \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}, \quad y_2''(s_0)= \frac{f''(x_0)}{1+f'^2(x_0)} \neq 0,$$

deci contactul dintre curbă şi tangentă este de ordinul întîi.

Ecuaţiile parametrice ale cercului osculator la curba (C) în punctul M sînt

$$x = \alpha + R\cos u, \qquad y = \beta + R\sin u,$$

unde α şi β sînt coordonatele centrului de curbură, iar R este raza de curbură, adică

$$\alpha = x_0 - \frac{f'(x_0)\left[1 + f'^2(x_0)\right]}{f''(x_0)},$$

$$\beta = f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$R = \frac{\left[1 + f'^2(x_0)\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|}\ .$$

Calculînd arcul s al cercului osculator, găsim

$$s = Ru,$$

deci ecuaţiile parametrice ale cercului osculator sînt

$$x = \alpha + R\cos\frac{s}{R}, \qquad y = \beta + R\sin\frac{s}{R}.$$

Notînd cu s_0 valoarea lui s corespunzătoare lui x_0, avem

$$s_0 = \frac{\left[1+f'^2(x_0)\right]^{3/2}}{|f''(x_0)|}\arccos\frac{f'(x_0)}{\left[1+f'^2(x_0)\right]^{1/2}}.$$

Ecuaţiile parametrice ale curbei (C) sînt

$$x = \alpha + R\cos\frac{s}{R}, \qquad y = f\left(\alpha + R\cos\frac{s}{R}\right).$$

Cu o notaţie analogă cu cazul precedent avem

$$y_1(s_0) = f(x_0), \quad y_1'(s_0) = \frac{f'}{(1+f'^2)^{1/2}}, \quad y_1''(s_0) = \frac{f''}{(1+f'^2)^2},$$

$$y_1'''(s_0) = -\frac{f'f''^2}{(1+f'^2)^{1/2}}$$

$$y_2(s_0) = f(x_0), \quad y_2'(s_0) = \frac{f'}{(1+f'^2)^{1/2}}, \quad y_2''(s_0) = \frac{f''}{(1+f'^2)^2},$$

$$y_2'''(s_0) = -\frac{f'f''^2}{(1+f'^2)^{1/2}} + \frac{f'''(1+f'^2)-3f'f''^2}{(1+f'^2)^{5/2}},$$

deci contactul dintre curbă şi cercul osculator este de ordinul doi.

Ca aplicaţie să determinăm ordinul contactului dintre curbele (C_1) şi (C_2) de ecuaţii parametrice

$$(C_1): \begin{cases} x = \cos u, \\ y = \sin u, \end{cases} \qquad (C_2): \begin{cases} x = \cos u + u^5, \\ y = \sin u - u^5, \end{cases}$$

în punctul $M(u=0)$.

Notînd cu s arcul pe curba (C_1), avem $s=u$. Calculînd diversele derivate ale funcţiilor $x_1(u)$, $x_2(u)$, $y_1(u)$, $y_2(u)$, în punctul M găsim

$x_1(0)=1,\ x_1'(0)=0,\ x_1''(0)=-1,\ x_1'''(0)=0,\ x_1^{IV}(0)=1,\ x_1^{V}(0)=0,$

$x_2(0)=1,\ x_2'(0)=0,\ x_2''(0)=-1,\ x_2'''(0)=0,\ x_2^{IV}(0)=1,\ x_2^{V}(0)=120,$

$y_1(0)=0,\ y_1'(0)=1,\ y_1''(0)=0,\ y_1'''(0)=-1,\ y_1^{IV}(0)=0,\ y_1^{V}(0)=1,$

$y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1,\ y_2''(0)=0,\ y_2'''(0)=-1,\ y_2^{IV}(0)=0,\ y_2^{V}(0)=-119,$

deci contactul dintre cele două curbe în punctul M este de ordinul patru.

Capitolul II

CURBE STRÎMBE

1. Ecuaţiile unei curbe strîmbe

Vom considera spaţiul raportat la un sistem de axe ortogonale Oxyz.

O mulţime de puncte din spaţiu homeomorfă cu punctele unui segment de dreaptă se numeşte arc simplu de curbă strîmbă.

Dacă notăm cu u abscisa unui punct oarecare de pe segmentul de dreaptă şi cu x,y,z coordonatele punctului corespunzător de pe arcul de curbă, avem

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \tag{1}$$

unde f, φ, ψ sînt funcţii continue şi care admit ca inverse tot funcţii continue.

Dacă u ia toate valorile care constituie domeniul de definiţie al funcţiilor f, φ şi ψ, ecuaţiile (1) definesc o curbă strîmbă în spaţiu.

Vom numi variabila u din ecuaţiile (1) parametrul pe curbă.

De asemenea vom spune că punctul M care corespunde valorii u a parametrului are abscisa curbilinie u şi vom nota $M(u)$.

O curbă strîmbă poate, de asemenea, fi definită prin ecuaţiile

$$F(x,y,z) = 0, \quad G(x,y,z) = 0, \tag{1'}$$

unde funcţiile F şi G sînt funcţii continue şi care admit derivate parţiale continue şi pentru care

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Intr-adevăr, în aceste condiţii putem rezolva sistemul (1') în funcţie de variabila x, avînd soluţiile

$$y = f(x), \qquad z = g(x).$$

Dacă notăm aici $x=u$, avem

$$x = u, \quad y = f(u), \quad z = g(u)$$

care sînt de forma (1).

Să considerăm acum punctul $M(u)$ pe curbă şi să notăm cu $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul de poziţie al punctului M. Vom nota de asemenea

$$\vec{r}(u) = f(u)\vec{i} + \varphi(u)\vec{j} + \psi(u)\vec{k},$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sînt versorii axelor de coordonate.

Ţinînd seama de ecuaţiile (1) avem

$$\vec{r} = \vec{r}(u). \qquad (1")$$

Ecuaţiile (1) se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei, ecuaţiile (1') ecuaţiile implicite, iar ecuaţia (1") ecuaţia vectorială a curbei.

O curbă strîmbă se numeşte algebrică dacă în ecuaţiile implicite (1') funcţiile F şi G sînt algebrice.

Curba (1) este curbă plană dacă coordonatele x,y,z ale unui punct curent al ei verifică ecuaţia unui plan, cu alte cuvinte dacă există un sistem de numere a, b, c, d nu toate nule pentru care

$$af(u) + b\varphi(u) + c\psi(u) + d = 0$$

pentru orice valoare a lui u.

2. Tangentă. Plan normal

Considerăm o curbă strîmbă ale cărei ecuaţii parametrice sînt ecuaţiile (1), funcţiile f, φ şi ψ fiind derivabile şi fie $M(u)$ un punct pe această curbă.

O dreaptă care intersectează curba în două puncte confundate în punctul M se numeşte tangentă la curbă în acest punct.

Pentru a determina ecuaţia tangentei la curba în M să considerăm pe curbă un alt punct $M_1(u_1)$. Ecuaţiile dreptei care trece prin punctele M şi M_1 sînt

$$\frac{x - f(u)}{f(u_1)-f(u)} = \frac{y - \varphi(u)}{\varphi(u_1)-\varphi(u)} = \frac{z - \psi(u)}{\psi(u_1)-\psi(u)}$$

sau

$$\frac{\dfrac{x - f(u)}{f(u_1)-f(u)}}{u_1 - u} = \frac{\dfrac{y - \varphi(u)}{\varphi(u_1)-\varphi(u)}}{u_1 - u} = \frac{\dfrac{z - \psi(u)}{\psi(u_1)-\psi(u)}}{u_1 - u}.$$

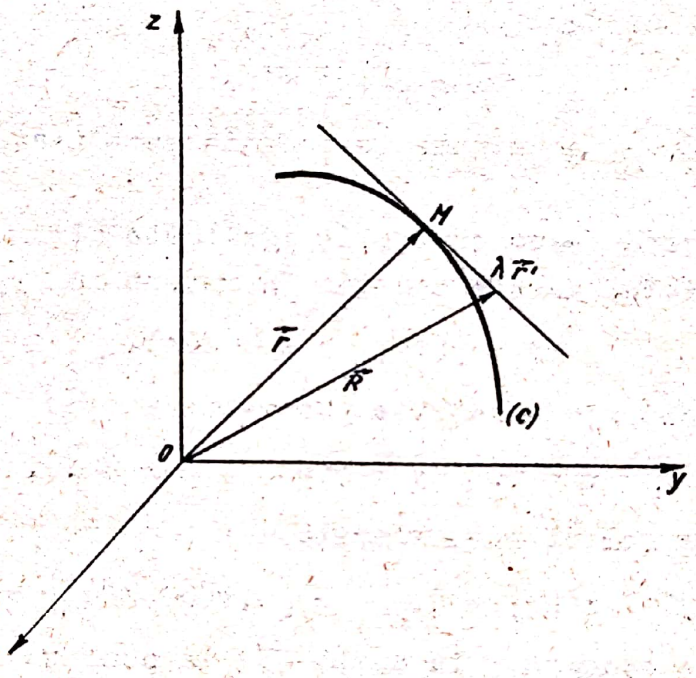


Fig.16

Trecînd la limita pentru $u \longrightarrow u_1$ şi ţinînd seama că funcţiile f, φ, ψ sînt derivabile, obţinem ecuaţiile tangentei la curbă în punctul $M(u)$,

$$\frac{x-f(u)}{f'(u)} = \frac{y-\varphi(u)}{\varphi'(u)} = \frac{z-\psi(u)}{\psi'(u)} . \qquad (2)$$

Cantităţile $f'(u)$, $\varphi'(u)$, $\psi'(u)$ sînt parametrii directori ai tangentei la curbă. De aici rezultă că dx, dy, dz constituie un alt sistem de parametri directori ai tangentei la curbă.

Ecuaţiile parametrice ale tangentei la curba (1) în punctul M(u) sînt

$$x=f(u)+\lambda f'(u), \quad y=\varphi(u)+\lambda\varphi'(u), \quad z=\psi(u)+\lambda\psi'(u). \qquad (2')$$

Fiind dat un vector $\vec{v}$ de componente $v_1(u)$, $v_2(u)$, $v_3(u)$, vectorul de componente $v_1'(u)$, $v_2'(u)$, $v_3'(u)$ se numeşte vectorul derivat al vectorului $\vec{v}$ şi se notează

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{du} .$$

Cu această definiţie, dacă notăm cu $\vec{R}$ vectorul de poziţie al unui punct curent de pe tangenta la curbă în punctul M, ecuaţiile (2') ne dau

$$\vec{R} = \vec{r} + \lambda \vec{r}' . \qquad (2'')$$

Această ecuaţie se numeşte ecuaţia vectorială a tangentei la curbă.

Să considerăm acum ecuaţiile implicite (1') ale curbei strîmbe. Rezolvînd aceste ecuaţii în raport cu y, z, obţinem

$$y = y(x), \qquad z = z(x).$$

Deci, curba are ecuaţiile parametrice

$$x = u, \quad y = y(u), \quad z = z(u). \qquad (3)$$

Cu aceste valori avem identic

$$F\left[u,y(u),z(u)\right] = 0, \qquad G\left[u,y(u),z(u)\right] = 0. \qquad (4)$$

Ecuaţiile tangentei la curba (3) în punctul M(u) sînt

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} ,$$

unde am notat cu X, Y, Z, coordonatele unui punct curent de pe tangentă.

Derivînd relaţiile (4) în raport cu u, deducem

$$F_x' + F_y' \cdot y' + F_z' \cdot z' = 0,$$

$$G_x' + F_y' \cdot y' + G_z' \cdot z' = 0.$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu y', z', obţinem

$$y' = \frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} , \qquad z' = \frac{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} ,$$

unde

$$\frac{D(F,G)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} , \ldots$$

Ecuaţiile tangentei la curba dată prin ecuaţiile implicite (1') sînt

$$\frac{X-x}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{Y-y}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{Z-z}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}} . \qquad (2''')$$

Dacă în punctul $M(u_o)$ al curbei (1) avem

$$x'^2(u_o) + y'^2(u_o) + z'^2(u_o) \neq 0,$$

cu alte cuvinte dacă în punctul M cel puţin una din derivatele x', y', z' este nenulă, tangenta la curbă este bine determinată şi punctul M se numeşte punct ordinar pentru curba (1).

Cînd în punctul $M(u_o)$ avem

$$x'(u_o) = y'(u_o) = z'(u_o) = 0,$$

punctul M se numeşte punct singular sau multiplu al curbei (1).

Dacă curba este dată prin ecuaţia vectorială (1"), punctul $M(u_o)$ este punct ordinar al curbei, cînd

$$\vec{r}'(u_o) \neq 0 .$$

Pentru $\vec{r}'(u_o) = 0$, punctul $M(u_o)$ este un punct singular sau multiplu.

Dacă

$$\vec{r}(u_o) = \vec{r}'(u_o) = \vec{r}''(u_o) = \ldots = \vec{r}^{(p-1)}(u_o) = 0,$$

$$\vec{r}^{(p)}(u_o) \neq 0,$$

punctul $M(u_o)$ este un punct multiplu de ordinul p pentru curba (1").

Fiind dată o curbă C de ecuaţii parametrice (1) şi $M(u_o)$ un punct ordinar al ei, vom spune că tangenta la curbă în punctul M are un contact de ordinul p cu curba, dacă avem

$$\frac{f^{(k)}(u_0)}{f^{(k-1)}(u_0)} = \frac{\varphi^{(k)}(u_0)}{\varphi^{(k-1)}(u_0)} = \frac{\psi^{(k)}(u_0)}{\psi^{(k-1)}(u_0)} \neq 0 \qquad (k=2,\ldots,p)$$

Tangenta la curbă într-un punct ordinar al ei care are cu curba un contact de ordinul p în acest punct se numeşte tangentă staţionară de ordinul p, iar punctul se numeşte punct staţionar de ordinul p.

Presupunînd curba dată prin ecuaţia vectorială (1"), condiţia ca punctul M să fie un punct ordinar este

$$\vec{r}'(u) \neq 0.$$

Fiind dată o curbă strîmbă şi un punct ordinar al ei M, planul perpendicular pe tangenta la curbă în acest punct se numeşte planul normal la curbă în punctul respectiv.

In cazul în care curba este dată prin ecuaţiile parametrice (1), planul normal la curbă în punctul M(u) are ecuaţia

$$f'(u)[X-f(u)] + \varphi'(u)[Y-\varphi(u)] + \psi'(u)[Z-\psi(u)] = 0,$$

unde am notat cu X, Y, Z coordonatele unui punct curent din planul normal la curbă.

Dacă curba este dată prin ecuaţiile implicite (1'), ecuaţia planului normal la curbă în punctul M(x,y,z) este

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(X-x) + \frac{D(F,G)}{D(z,x)}(Y-y) + \frac{D(F,G)}{D(x,y)}(Z-z) = 0 .$$

Orice dreaptă din planul normal la curbă în punctul M care trece prin M se numeşte normală la curbă în M.

3. Lungimea unui arc de curbă

Fie o curbă strîmbă de ecuaţii parametrice (1) şi două puncte pe ea A(a), B(b). Vom presupune că funcţiile f(u), $\varphi(u)$, $\psi(u)$ sînt derivabile şi cu derivate continue şi că punctele arcului AB sînt puncte ordinare ale curbei.

Să considerăm o diviziune a arcului AB prin punctele $A_1 = A$, $A_2,\ldots,A_p$, $A_{p+1},\ldots,A_n$, $A_{n+1} = B$, corespunzătoare valorilor $u_1 = a < u_2 < \ldots < u_p < u_{p+1} < \ldots < u_n < u_{n+1} = b$ ale parametrului u.

Segmentele $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,...,$\overline{A_pA_{p+1}}$,...,$\overline{A_nA_{n+1}}$ formează o linie poligonală înscrisă în arcul AB. Să notăm cu ℓ_n lungimea acestei linii poligonale, adică

$$\ell_n = \sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA_{p+1}} .$$

Să notăm, de asemenea, cu δ lungimea celui mai mare segment al liniei poligonale.

Vom arăta că dacă $n \longrightarrow \infty$ şi $\delta \longrightarrow 0$, lungimea ℓ_n tinde către o limită finită şi bine determinată, pe care o vom numi lungimea arcului AB şi o vom nota cu s.

Dacă notăm cu $\vec{r}(u)$ vectorul de poziţie al punctului M(u) de pe curbă, atunci avem

$$\overrightarrow{A_pA_{p+1}} = \vec{r}(u_{p+1}) - \vec{r}(u_p).$$

Dar vectorul $\vec{r}(u)$ este derivabil, deci

$$\frac{\vec{r}(u_{p+1})-\vec{r}(u_p)}{u_{p+1}-u_p} = \vec{r}'(u_p) + \vec{\varepsilon}_p,$$

unde $\vec{\varepsilon}_p \longrightarrow 0$ cînd $u_{p+1} \longrightarrow u_p$.

Deci

$$\overrightarrow{A_pA_{p+1}} = \left[\vec{r}'(u_p) + \vec{\varepsilon}_p\right](u_{p+1}-u_p). \qquad (5)$$

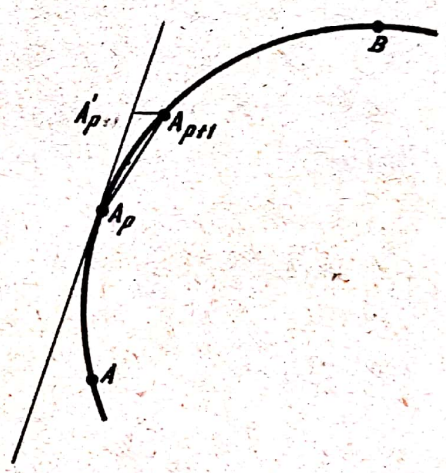


Fig.17

Avînd în vedere ecuaţia (2") a tangentei la curbă în punctul A_p, rezultă că există pe aceasta un punct A_p', astfel încît

$$\overrightarrow{A_pA_p'} = \vec{r}'(u_p)(u_{p+1} - u_p). \qquad (5')$$

Din relaţiile (5) şi (5') rezultă că

$$\overrightarrow{A_p'A_{p+1}} = \vec{\varepsilon}_p(u_{p+1} - u_p).$$

Avem

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\overrightarrow{A_pA_{p+1}} - \sum_{p=1}^{n}\overrightarrow{A_pA_p'}\right| = \left|\sum_{p=1}^{n}\left(\overrightarrow{A_pA_{p+1}} - \overrightarrow{A_pA_p'}\right)\right| \leq \sum_{p=1}^{n}\left|\overrightarrow{A_pA_{p+1}} - \overrightarrow{A_pA_p'}\right|. \qquad (6)$$

Scriind inegalitatea triunghiului în triunghiul $A_pA'_pA_{p+1}$, avem

$$\left|\overline{A_pA_{p+1}} - \overline{A_pA'_p}\right| \leq \overline{A'_pA_{p+1}} .$$

Dar

$$\overline{A'_pA_{p+1}} = \left|\overrightarrow{A'_pA_{p+1}}\right| = \left|\vec{\varepsilon}_p\right| (u_{p+1} - u_p).$$

Deci

$$\left|\overline{A_pA_{p+1}} - \overline{A_pA'_p}\right| \leq \left|\vec{\varepsilon}_p\right| (u_{p+1} - u_p) .$$

Cu aceasta, inegalitatea (6) devine

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA_{p+1}} - \sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA'_p}\right| \leq \sum_{p=1}^{n} \left|\vec{\varepsilon}_p\right| (u_{p+1} - u_p). \qquad (6')$$

Ţinînd seama că dacă $u_{p+1} \to u_p$ avem $\vec{\varepsilon}_p \to 0$, rezultă că există un număr $\varepsilon > 0$, astfel încît $\left|\vec{\varepsilon}_p\right| \leq \varepsilon$ pentru orice p şi $\varepsilon \to 0$ cînd $u_{p+1} \to u_p$ şi $n \to \infty$.

Relaţia (6') se poate scrie deci

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA_{p+1}} - \sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA'_p}\right| \leq \varepsilon \sum_{p=1}^{n} (u_{p+1} - u_p) = \varepsilon (b - a).$$

Rezultă că

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA_{p+1}} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{p=1}^{n} \overline{A_pA'_p} ,$$

sau

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} l_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{p=1}^{n} \left|\vec{r}'(u_p)\right| (u_{p+1} - u_p).$$

Avînd în vedere expresia lui $\vec{r}_p(u)$, rezultă

$$\left|\vec{r}'(u_p)\right| = \sqrt{f'^2(u_p) + \varphi'^2(u_p) + \psi'^2(u_p)}.$$

Funcţiile f, φ, ψ au derivatele continue, deci funcţia

$$\sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}$$

este integrabilă şi

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \sum_{p=1}^{n} \sqrt{f'^2(u_p) + \varphi'^2(u_p) + \psi'^2(u_p)}\,(u_{p+1}-u_p) =$$

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\ du.$$

Rezultă că $\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \ell_n$ există şi deci lungimea arcului AB este

$$s = \int_a^b \sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\ du\ . \qquad (7)$$

Diferenţiind această relaţie (luînd b=u) şi ţinînd seama de ecuaţiile parametrice (1) ale curbei, rezultă că diferenţiala ds, pe care o vom numi elementul de arc pe curbă, este dată de formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (7')$$

Din această formulă rezultă că

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

deci, ţinînd seama că dx, dy, dz reprezintă un sistem de parametri directori ai tangentei la curbă, rezultă că

$$\alpha = \frac{dx}{ds}\ ,\quad \beta = \frac{dy}{ds}\ ,\quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

sînt cosinusurile directoare ale tangentei la curbă.

Vectorul de componente α, β, γ este deci versorul tangentei la curbă. Îl vom nota $\vec{t}$.

Să considerăm acum arcul determinat de punctele A(a) şi M(u). Lungimea arcului AM este

$$s = \int_a^u \sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\ du.$$

Integrala din membrul doi este o funcţie de u, deci

$$s = F(u).$$

Ţinînd seama că $F'(u) = \sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u) + \psi'^2(u)} \neq 0$, rezultă că putem inversa această formulă şi avem

$$u = \Phi(s).$$

Inlocuind această valoare a lui u în ecuaţiile (1), obţinem ecuaţiile parametrice ale curbei în funcţie de arcul pe curbă

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Ca aplicaţie să calculăm lungimea arcului curbei ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{2t^3}{3}.$$

Avem

$$dx = dt, \quad dy = 2tdt, \quad dz = 2t^2dt,$$

deci

$$ds^2 = (1+4t^2+4t^4)\,dt^2,$$

de unde

$$ds = (1+2t^2)dt.$$

Integrînd şi luînd ca origine a arcelor pe curbă punctul cu abscisa curbilinie $t = 0$, obţinem

$$s = t + \frac{2t^3}{3}.$$

Cosinusurile directoare ale tangentei la curbă sînt

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1+2t^2}, \quad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{2t}{1+2t^2}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{2t^2}{1+2t^2}.$$

4. Plan osculator, Triedrul lui Frenet

Fie o curbă strîmbă (C) de ecuaţii parametrice (1) şi $M(u_o)$ un punct ordinar al ei.

Un plan care intersectează curba (C) în trei puncte confundate în punctul M se numeşte planul osculator la curbă în acest punct.

Fie deci un plan care trece prin punctul M de ecuaţie

$$A\left[x-f(u_o)\right] + B\left[y-\varphi(u_o)\right] + C\left[z-\psi(u_o)\right] = 0. \qquad (8)$$

Punctele de intersecţie ale acestui plan cu curba (1) au ca abscise curbilinii soluţiile ecuaţiei

$$A\left[f(u)-f(u_0)\right]+B\left[\varphi(u)-\varphi(u_0)\right]+C\left[\psi(u)-\psi(u_0)\right]=0.$$

Dacă dezvoltăm funcţiile $f(u)$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ în seria Taylor în jurul punctului u_0, această ecuaţie se scrie

$$A\left[\frac{u-u_0}{1!}f'(u_0)+\frac{(u-u_0)^2}{2!}f''(u_0)+\frac{(u-u_0)^3}{3!}f'''(u_0)+\dots\right]+$$

$$+B\left[\frac{u-u_0}{1!}\varphi'(u_0)+\frac{(u-u_0)^2}{2!}\varphi''(u_0)+\frac{(u-u_0)^3}{3!}\varphi'''(u_0)+\dots\right]+$$

$$+C\left[\frac{u-u_0}{1!}\psi'(u_0)+\frac{(u-u_0)^2}{2!}\psi''(u_0)+\frac{(u-u_0)^3}{3!}\psi'''(u_0)+\dots\right]=0$$

sau

$$\frac{u-u_0}{1!}\left[Af'(u_0)+B\varphi'(u_0)+C\psi'(u_0)\right]+\frac{(u-u_0)^2}{2!}\left[Af''(u_0)+B\varphi''(u_0)+C\psi''(u_0)\right]+$$

$$+\frac{(u-u_0)^3}{3!}\left[Af'''(u_0)+B\varphi'''(u_0)+C\psi'''(u_0)\right]+\dots=0. \qquad (9)$$

Pentru ca planul (8) să fie osculator la curba (1) în punctul ordinar M, trebuie ca această ecuaţie să admită rădăcina triplă $u=u_0$, deci trebuie ca

$$Af'(u_0)+B\varphi'(u_0)+C\psi'(u_0)=0,$$

$$Af''(u_0)+B\varphi''(u_0)+C\psi(u_0)=0.$$

Presupunînd că tangenta la curbă în punctul M nu este staţionară, din aceste două ecuaţii şi din ecuaţia (8) rezultă ecuaţia planului osculator la curba (1) în punctul $M(u_0)$.

$$\begin{vmatrix} x-f(u_0) & y-\varphi(u_0) & z-\psi(u_0) \\ f'(u_0) & \varphi'(u_0) & \psi'(u_0) \\ f''(u_0) & \varphi''(u_0) & \psi''(u_0) \end{vmatrix}=0. \qquad (10)$$

Dacă notăm cu $\vec{R}$ vectorul de poziţie al unui punct din planul osculator la curbă în $M(u_0)$ şi cu $\vec{r}$ vectorul de po-

ziţie al acestui punct, ecuaţia vectorială a planului osculator este

$$(\vec{R} - \vec{r},\ \vec{r}',\ \vec{r}'') = 0, \qquad (10')$$

unde $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ este produsul mixt al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Deci, dacă tangenta la curbă în punctul $M(u_o)$ nu este staţionară, planul osculator la curbă în acest punct are ecuaţia (10) sau (10').

Dacă tangenta la curbă în punctul $M(u_o)$ are în acest punct un contact de ordinul p cu curba, atunci avem

$$Af'(u_o)+B\varphi'(u_o)+C\psi'(u_o)=\lambda_1\left[Af''(u_o)+B\varphi''(u_o)+C\psi''(u_o)\right]=\ldots$$

$$=\lambda_p\left[Af^{(p)}(u_o)+B\varphi^{(p)}(u_o)+C\psi^{(p)}(u_o)\right]\neq$$

$$\neq\lambda_{p+1}\left[Af^{(p+1)}(u_o)+B\varphi^{(p+1)}(u_o)+C\psi^{(p+1)}(u_o)\right],$$

unde $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}\neq 0$.

Presupunînd că planul (8) trece prin tangenta la curbă în punctul M, avem

$$Af'(u_o)+B\varphi'(u_o)+C\psi'(u_o)=0$$

şi deci

$$Af^{(k)}(u_o)+B\varphi^{(k)}(u_o)+C\psi^{(k)}(u_o)=0, \qquad (k=2,\ldots,p).$$

Ecuaţia (9) devine

$$\frac{(u-u_o)^{p+1}}{(p+1)!}\left[Af^{(p+1)}(u_o)+B\varphi^{(p+1)}(u_o)+C\psi^{(p+1)}(u_o)\right]+\ldots=0, \qquad (9')$$

deci orice plan care trece prin tangenta la o curbă într-un punct ordinar M, staţionar de ordinul p, intersectează curba în $p+1$ puncte confundate în M.

Planul care întîlneşte curba în $p+2$ puncte confundate în M se numeşte plan osculator la curbă.

Pentru ca ecuaţia (9') să aibă o rădăcină multiplă de ordinul $p+2$, $u=u_o$ trebuie ca

$$Af^{(p+1)}(u_o)+B\varphi^{(p+1)}(u_o)+C\psi^{(p+1)}(u_o)=0.$$

Deci, ecuaţia planului osculator la curba (1) în punctul ordinar $M(u_o)$ care este staţionar de ordinul p este

$$\begin{vmatrix} x-f(u_o) & y-\varphi(u_o) & z-\psi(u_o) \\ f'(u_o) & \varphi'(u_o) & \psi'(u_o) \\ f^{(p+1)}(u_o) & \varphi^{(p+1)}(u_o) & \psi^{(p+1)}(u_o) \end{vmatrix} = 0.$$

Să presupunem acum că punctul $M(u_o)$ este punct multiplu de ordinul p pentru curba (1). In acest caz avem

$$f'(u_o) = f''(u_o) = \ldots = f^{(p-1)}(u_o) = 0,$$

$$\varphi'(u_o) = \varphi''(u_o) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(u_o) = 0,$$

$$\psi'(u_o) = \psi''(u_o) = \ldots = \psi^{(p-1)}(u_o) = 0,$$

$$\left[f^{(p)}(u_o)\right]^2 + \left[\varphi^{(p)}(u_o)\right]^2 + \left[\psi^{(p)}(u_o)\right]^2 \neq 0.$$

Ecuaţia (9) care ne dă punctele de intersecţie ale planului (8) cu curba (1) devine

$$\frac{(u-u_o)^p}{p!}\left[Af^{(p)}(u_o)+B\varphi^{(p)}(u_o)+C\psi^{(p)}(u_o)\right] +$$

$$+\frac{(u-u_o)^{p+1}}{(p+1)!}\left[Af^{(p+1)}(u_o)+B\varphi^{(p+1)}(u_o)+C\psi^{(p+1)}(u_o)\right]+\ldots=0. \qquad (9'')$$

Această ecuaţie are rădăcina $u=u_o$ multiplă de ordinul p, deci orice plan care trece printr-un punct multiplu de ordinul p al unei curbe strîmbe intersectează curba în p puncte confundate în acesta.

Planul care intersectează curba în $p+2$ puncte confundate în M se numeşte planul osculator la curbă în acest punct.

Pentru aceasta trebuie ca ecuaţia (9") să aibă pe $u=u_o$ ca rădăcină multiplă de ordinul $p+2$, adică

$$Af^{(p)}(u_o)+B\varphi^{(p)}(u_o)+C\psi^{(p)}(u_o) = 0,$$

$$Af^{(p+1)}(u_o)+B\varphi^{(p+1)}(u_o)+C\psi^{(p+1)}(u_o) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste ecuaţii şi din (8) rezultă

$$\begin{vmatrix} x=f(u_o) & y=\varphi(u_o) & z=\psi(u_o) \\ f^{(p)}(u_o) & \varphi^{(p)}(u_o) & \psi^{(p)}(u_o) \\ f^{(p+1)}(u_o) & \varphi^{(p+1)}(u_o) & \psi^{(p+1)}(u_o) \end{vmatrix} = 0,$$

care este ecuaţia planului osculator la curba (1) în punctul multiplu de ordinul p, $M(u_o)$.

In cele ce urmează, dacă M(u) este un punct ordinar nestaţionar al curbei (1), notăm cu A, B, C coeficienţii planului osculator la curbă în acest punct, adică

$$A = \varphi'(u)\,\psi''(u) - \varphi''(u)\,\psi'(u),$$

$$B = \psi'(u)\,f''(u) - \psi''(u)\,f'(u),$$

$$C = f'(u)\,\varphi''(u) - f''(u)\,\varphi'(u).$$

Fiind dată o curbă (C) de ecuaţii parametrice (1) şi un punct ordinar al ei M(u), normala în M conţinută în planul osculator al curbei în acest punct se numeşte <u>normala principală</u> la curbă în punctul respectiv.

Deci, normala principală la o curbă strîmbă într-un punct ordinar al ei este intersecţia planului normal cu planul osculator în acest punct.

Parametrii directori ai normalei principale la curbă în punctul M sînt deci minorii matricei

$$\begin{Vmatrix} f'(u_o) & \varphi'(u_o) & \psi'(u_o) \\ A & B & C \end{Vmatrix}.$$

Vom nota cosinusurile directoare ale normalei principale cu α_1, β_1, γ_1, iar vectorul care are componentele α_1, β_1, γ_1, adică versorul normalei principale cu $\vec{n}$.

Normala la curba (C) în punctul M, perpendiculară pe planul osculator în acest punct se numeşte <u>binormala</u> la curbă în punctul M. Parametrii directori ai binormalei sînt deci A, B, C.

Vom nota cosinusurile directoare ale binormalei cu α_2, β_2, γ_2, iar versorul acesteia cu $\vec{b}$.

Planul determinat de tangenta şi de binormala la curbă se numeşte planul <u>rectifiant</u> la curbă. Ecuaţia lui este

$$\begin{vmatrix} x-f(u_0) & y-\varphi(u_0) & z-\psi(u_0) \\ f'(u_0) & \varphi'(u_0) & \psi'(u_0) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Tangenta, normala principală şi binormala la o curbă într-un punct M formează un triedru tridreptunghic, numit <u>triedrul lui Frenet</u>, ataşat curbei în punctul M (fig.18).

Ca aplicaţie să determinăm ecuaţiile muchiilor şi ale feţelor triedrului lui Frenet, ataşat unei elice circulare, ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = \cos u,$$
$$y = \sin u,$$
$$z = u.$$

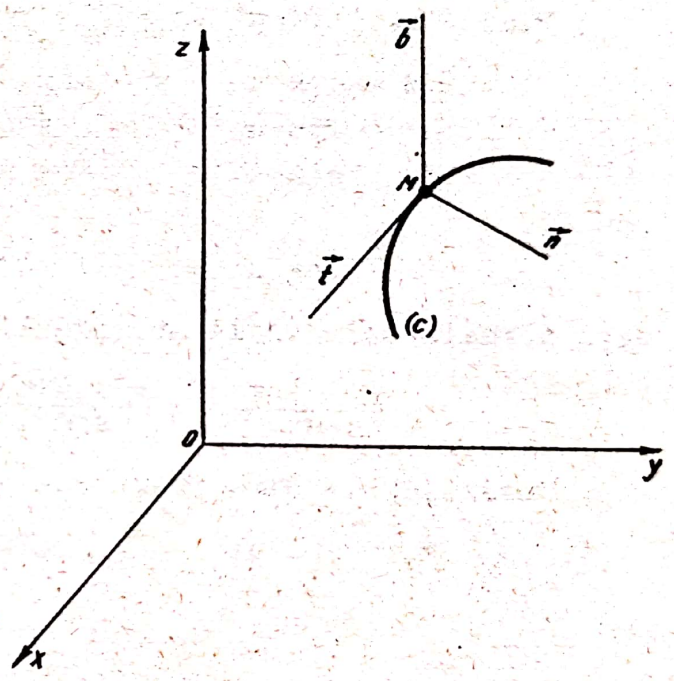


Fig.18

Ecuaţiile tangentei la curbă în punctul M(u) sînt

$$\frac{x-\cos u}{-\sin u} = \frac{y-\sin u}{\cos u} = \frac{z-u}{1}.$$

Cosinusurile directoare ale tangentei sînt deci

$$\alpha = -\frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Planul normal la curbă are ecuaţia

$$-\sin u \cdot x + \cos u \cdot y + z - u = 0.$$

Avem

$$A = \sin u, \qquad B = -\cos u, \qquad C = 1,$$

deci ecuaţia planului osculator este

$$\sin u \cdot x - \cos u \cdot y + z - u = 0,$$

iar binormala are ecuaţiile

$$\frac{x - \cos u}{\sin u} = \frac{y - \sin u}{-\cos u} = \frac{z - u}{1}.$$

Cosinusurile directoare ale binormalei sînt

$$\alpha_2 = \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Planul rectifiant la curbă are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x - \cos u & y - \sin u & z - u \\ -\sin u & \cos u & 1 \\ \sin u & -\cos u & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\cos u \cdot x + \sin u \cdot y - 1 = 0,$$

deci normala principală are ecuaţiile

$$\frac{x - \cos u}{\cos u} = \frac{y - \sin u}{\sin u} = \frac{z-u}{0}.$$

Cosinusurile directoare ale normalei principale sînt

$$\alpha_1 = \cos u, \quad \beta_1 = \sin u, \quad \gamma_1 = 0.$$

5. Formulele lui Frenet

Considerăm o curbă strîmbă (C), ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \tag{11}$$

unde s este arcul pe curbă.

Avem

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

deci cosinusurile directoare ale tangentei la curbă în punctul $M(s)$ sînt

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Ţinînd seama că muchiile triedrului lui Frenet ataşat curbei în punctul M sînt perpendiculare două cîte două, rezultă că

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0, \qquad \vec{t} \cdot \vec{b} = 0, \qquad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \tag{12}$$

De asemenea avem relaţiile

$$\vec{t}^2 = 1, \qquad \vec{n}^2 = 1, \qquad \vec{b}^2 = 1. \tag{12'}$$

Dacă derivăm în raport cu s prima relaţie (12'), obţinem

$$\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0,$$

de unde rezultă că vectorul $\frac{d\vec{t}}{ds}$ este perpendicular pe tangenta la curbă, deci se află în planul normal la curbă în punctul M.

Ţinînd seama de expresia componentelor versorului $\vec{t}$, deducem

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}.$$

De aici rezultă că vectorul $\frac{d\vec{t}}{ds}$ este conţinut în planul osculator la curba în punctul M, deci vectorul $\frac{d\vec{t}}{ds}$ este la intersecţia planului osculator cu planul normal, prin urmare este situat pe normala principală la curbă în punctul M.

Rezultă că

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}, \tag{13}$$

unde R este un factor de proporţionalitate.

Vom presupune că vectorii $\frac{d\vec{t}}{ds}$ şi $\vec{n}$ au aceeaşi orientare, deci că $R > 0$.

R se numeşte <u>raza de curbură</u> a curbei în punctul M, iar $\frac{1}{R}$ se numeşte <u>curbura</u> curbei în acest punct.

Formula (13) se numeşte <u>prima formulă a lui Frenet</u>.

Dacă derivăm în raport cu s a treia relaţie (12'), obţinem

$$\vec{b} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = 0,$$

deci vectorul $\frac{d\vec{b}}{ds}$ este perpendicular pe binormala la curbă, adică el este situat în planul osculator la curbă. Ţinînd seama că planul osculator este determinat de tangentă şi normala principală, rezultă că

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \lambda\vec{t} + \mu\vec{n} . \qquad (14)$$

Să derivăm acum a doua relaţie (12) în raport cu s,

$$\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{b} + \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{t} = 0.$$

Ţinînd seama aici de relaţiile (13) şi (14), obţinem

$$\lambda = 0.$$

Notînd $\mu = \frac{1}{T}$, relaţia (14) se scrie

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T} . \qquad (13')$$

T se numeşte <u>raza de torsiune</u> a curbei în punctul M, iar $\frac{1}{T}$ se numeşte <u>torsiunea</u> curbei în acest punct.

Formula (13') este <u>a doua formulă a lui Frenet</u>.

Derivînd a doua relaţie (12') în raport cu s, deducem

$$\vec{n}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = 0,$$

de unde rezultă că vectorul $\frac{d\vec{n}}{ds}$ este perpendicular pe $\vec{n}$, deci este conţinut în planul rectifiant la curbă, adică

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \lambda_1\vec{t} + \mu_1\vec{b}. \qquad (15)$$

Dacă derivăm încă prima relaţie (12) în raport cu s şi ţinem seama de relaţia (13) şi (15), găsim

$$\lambda_1 = -\frac{1}{R} .$$

De asemenea, derivînd a treia relaţie (12) în raport cu s şi avînd în vedere relaţiile (14) şi (15), obţinem

$$\mu_1 = -\frac{1}{T} .$$

Relaţia (15) devine

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} . \qquad (13'')$$

Aceasta este <u>a treia formulă a lui Frenet</u>.

Să arătăm acum cum putem obţine coordonatele x, y, z ale unui punct oarecare de pe curbă, în funcţie de arcul s pe curbă, cu ajutorul formulelor lui Frenet.

Vom presupune că originea axelor de coordonate se află pe curbă, obţinîndu-se pentru s=0, că axa Ox este tangentă la curbă, iar planul xOy este planul osculator la curbă în O.

Dezvoltînd în serie Taylor în jurul originii funcţiile x, y, z, avem

$$x = s\left(\frac{dx}{ds}\right)_o + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_o + \dots$$

$$y = s\left(\frac{dy}{ds}\right)_o + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_o + \dots$$

$$z = s\left(\frac{dz}{ds}\right)_o + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_o + \dots$$

Fie α, β, γ cosinusurile directoare ale tangentei la curbă în punctul O; avem atunci

$$\alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)_o, \qquad \beta = \left(\frac{dy}{ds}\right)_o, \qquad \gamma = \left(\frac{dz}{ds}\right)_o$$

şi, ţinînd seama că tangenta la curbă este axa Ox, rezultă

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_o = 1, \left(\frac{dy}{ds}\right)_o = \left(\frac{dz}{ds}\right)_o = 0.$$

Notînd cu α_1, β_1, γ_1 cosinusurile directoare ale normalei principale la curbă în origine, prima formulă a lui Frenet ne dă

$$\alpha_1 = R\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o, \qquad \beta_1 = R\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o, \qquad \gamma_1 = R\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o .$$

Avînd în vedere că normala principală este axa Oy, deducem

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o = \frac{1}{R}, \qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o = \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o = 0.$$

Dacă α_2, β_2, γ_2 sînt cosinusurile directoare ale binormalei la curbă în O, a treia formulă a lui Frenet se scrie

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}.$$

Ţinînd seama că $\alpha_1 = R\frac{d^2x}{ds^2}$, din această formulă deducem

$$R\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}$$

sau

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha}{R^2} - \frac{\alpha_1}{R}\cdot\frac{dR}{ds} - \frac{\alpha_2}{RT}.$$

In origine avem $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, deci

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_o = -\frac{1}{R^2}.$$

Analog găsim

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_o = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{dR}{ds}, \qquad \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_o = -\frac{1}{RT}.$$

Cu aceste formule deducem

$$x = s - \frac{s^3}{6R^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{s^2}{2R} - \frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds} + \ldots,$$

$$z = -\frac{s^3}{6RT} + \ldots,$$

termenii nescrişi fiind cel puţin de gradul patru în s, razele de curbură şi torsiune fiind calculate în origine.

6. Curbura şi torsiunea unei curbe strîmbe

Din prima formulă a lui Frenet putem deduce expresia razei de curbură a unei curbe strîmbe.

Astfel, din formula (13) rezultă

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \frac{|\vec{n}|}{R},$$

sau, avînd în vedere că $|\vec{n}| = 1$ şi că $\frac{d\vec{t}}{ds}$ are componentele

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \qquad (16)$$

Să deducem acum expresia curburii unei curbe strîmbe cînd aceasta este dată prin ecuaţiile parametrice, depinzînd de un parametru oarecare

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Avem

$$ds = \sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)}\, du,$$

adică, notînd

$$\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} = \phi(u),$$

$$\frac{ds}{du} = \phi(u).$$

De asemenea să notăm cu $\vec{r}(u)$ vectorul de poziţie al unui punct ordinar $M(u)$ al curbei, adică

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Ţinînd seama că

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{du}$$

şi că $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$, rezultă

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \phi\,\vec{t}. \qquad (17)$$

Avem

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{d}{du}(\phi\,\vec{t}) = \phi'\,\vec{t} + \phi\frac{d\vec{t}}{du} = \phi'\,\vec{t} + \phi\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\frac{ds}{du}$$

sau, avînd în vedere formula (13),

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \phi\vec{t} + \frac{\phi^2}{R}\vec{n}, \qquad (17')$$

unde R este raza de curbură a curbei în punctul M.

Inmulţind vectorial relaţiile (17) şi (17') şi ţinînd seama că $\vec{t} \times \vec{t} = 0$, $\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}$, obţinem

$$\frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{\phi^3}{R}\vec{b},$$

care se mai poate scrie

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^2z}{du^2} \end{vmatrix} = \frac{\phi^3}{R}\vec{b},$$

ori încă

$$A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \frac{\phi^3}{R}\vec{b}.$$

De aici deducem

$$\left|A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right| = \frac{\phi^3}{R}\left|\vec{b}\right|;$$

cum însă $|\vec{b}| = 1$, obţinem

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{\phi^3}{R},$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}, \qquad (x' = \frac{dx}{du}, \ldots).$$

Pentru a deduce expresia torsiunii unei curbe strîmbe, să calculăm derivata a treia a vectorului $\vec{r}$ în raport cu parametrul u. Avem

$$\frac{d^3\vec{r}}{du^3} = \left(\frac{d}{du}\ \phi'\vec{t} + \frac{\phi^2}{R}\vec{n}\right) = \phi''\vec{t} + \phi\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{du} + \frac{d}{du}\left(\frac{\phi^2}{R}\right)\vec{n} + \frac{\phi^2}{R}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\frac{ds}{du},$$

sau, ţinînd seama de prima şi a treia formulă a lui Frenet,

$$\frac{d^3\vec{r}}{du^3} = \left(\phi'' - \frac{\phi^3}{R^2}\right)\vec{t} + \left[\frac{d}{du}\left(\frac{\phi^2}{R}\right) + \frac{\phi\phi'}{R}\right]\vec{n} - \frac{\phi^3}{RT}\vec{b}.$$

Inmulţind scalar această egalitate cu $\vec{b}$, deducem

$$\vec{b} \cdot \frac{d^3 \vec{r}}{du^3} = - \frac{\phi'}{RT} .$$

Dar componentele versorului $\vec{b}$ sînt

$$\alpha_2 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \quad \beta_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \quad \gamma_2 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} ,$$

şi, avînd în vedere expresia lui ϕ şi a razei de curbură, găsim că

$$\frac{1}{T} = - \frac{Ax''' + By''' + Cz'''}{A^2+B^2+C^2} .$$

Dacă punem

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} ,$$

această relaţia se scrie

$$\frac{1}{T} = - \frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2} .$$

Să demonstrăm acum următoarea teoremă, care ne dă o interpretare geometrică a curburii unei curbe strîmbe:

Fie M şi M_1 două puncte ordinare ale unei curbe strîmbe şi ε unghiul dintre tangentele la curbă în M şi M_1 (unghiul de contingenţă al celor două tangente). Atunci

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\varepsilon}{\text{arc } MM_1} = \frac{1}{R_M} ,$$

unde R_M este raza de curbură a curbei în punctul M.

Considerăm că ecuaţiile parametrice ale curbei sînt date în funcţie de arcul s pe curbă şi fie $M(s)$, $M_1(s_1)$ cele două puncte de pe curbă. Avem arc $MM_1 = |s_1 - s|$.

Versorii tangentelor la curbă în punctele M, M_1 sînt $\vec{t}(s)$, respectiv $\vec{t}(s_1)$ şi avem

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} ,$$

$\vec{r}$ fiind vectorul de poziţie al punctului M.

Ţinînd seama că vectorii $\vec{t}(s)$ şi $\vec{t}(s_1)$ sînt versori, rezultă

$$\sin \varepsilon = \left| \vec{t}(s) \times \vec{t}(s_1) \right| . \qquad (18)$$

Dezvoltînd în serie Taylor vectorul $\vec{t}\,(s_1)$ în jurul punctului M_1, avem

$$\vec{t}\,(s_1) = \vec{t}\,(s) + \frac{s_1 - s}{1!} \left(\frac{d\vec{t}}{ds} + \vec{\mu} \right),$$

unde $\vec{\mu} \longrightarrow 0$ cînd $s_1 \longrightarrow s$, sau, în baza formulei lui Frenet,

$$\vec{t}\,(s_1) = \vec{t}\,(s) + \frac{s_1 - s}{1!} \left[\frac{\vec{n}(s)}{R_M} + \vec{\mu} \right].$$

Cu aceasta formula (18) devine

$$\sin \varepsilon = \left| s_1 - s \right| \cdot \left| \frac{1}{R_M} \vec{t}\,(s) \times \vec{n}\,(s) + \vec{t}\,(s) \times \vec{\mu} \right|$$

sau

$$\sin \varepsilon = \left| s_1 - s \right| \cdot \left| \frac{1}{R_M} \vec{b}\,(s) + \vec{t}\,(s) \times \vec{\mu} \right| .$$

De aici deducem

$$\frac{\varepsilon}{|s_1 - s|} = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot \left| \frac{1}{R_M} \vec{b}\,(s) + \vec{t}\,(s) \times \vec{\mu} \right| .$$

Avînd în vedere că dacă $s_1 \longrightarrow s$, atunci $\varepsilon \longrightarrow 0$, rezultă

$$\lim_{s_1 \to s} \frac{\varepsilon}{|s_1 - s|} = \left| \frac{1}{R} \vec{b}(s) \right| ,$$

de unde

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\varepsilon}{\text{arc } MM_1} = \frac{1}{R_M} .$$

O interpretare geometrică a torsiunii unei curbe într-un punct al ei este dată de teorema:

<u>Fie M şi M_1 două puncte ordinare şi η unghiul dintre binormalele la curbă în aceste puncte. Atunci</u>

$$\lim_{M' \to M} \frac{\eta}{\text{arc } MM_1} = \frac{1}{|T_M|} ,$$

<u>unde T_M este raza de torsiune a curbei în punctul M.</u>

Cu aceeaşi notaţie de mai sus avem arc $MM_1 = |s_1 - s|$.

Versorii binormalelor la curba în M şi M_1 sînt $\vec{b}(s)$, respectiv $\vec{b}(s_1)$.

Avem

$$\sin\eta = \left|\vec{b}(s) \times \vec{b}(s_1)\right| . \qquad (19)$$

Dezvoltînd în serie Taylor vectorul $\vec{b}(s_1)$ în jurul punctului s, obţinem

$$\vec{b}(s_1) = \vec{b}(s) + \frac{s_1-s}{1!}\left(\frac{d\vec{b}}{ds} + \vec{\mu}_1\right),$$

unde $\vec{\mu} \longrightarrow 0$ cînd $s_1 \longrightarrow s$ sau, în baza celei de-a doua formule a lui Frenet,

$$\vec{b}(s_1) = \vec{b}(s) + \frac{s_1-s}{1!}\left[\frac{\vec{n}(s)}{T} + \vec{\mu}_1\right].$$

Cu aceasta, relaţia (19) ne dă

$$\sin\eta = |s_1-s| \cdot \left|\frac{1}{T_M}\vec{b}(s) \times \vec{n}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{\mu}_1\right| .$$

sau

$$\sin\eta = |s_1-s| \cdot \left|-\frac{1}{T_M}\vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{\mu}_1\right| .$$

De aici rezultă

$$\frac{\eta}{|s_1-s|} = \frac{\eta}{\sin\eta} \cdot \left|-\frac{1}{T_M}\vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{\mu}_1\right| .$$

Dar, dacă $s_1 \longrightarrow s$, avem $\eta \longrightarrow 0$, deci

$$\lim_{s_1 \to s} \frac{\eta}{|s_1-s|} = \left|-\frac{1}{T_M}\vec{t}(s)\right| ,$$

adică

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\eta}{\text{arc } MM_1} = \frac{1}{|T_M|} .$$

-Vom considera acum o clasă importantă de curbe strîmbe: elicele.

-Se numesc elice curbele din spaţiu pentru care tangenta la curbă face un unghi constant cu o direcţie fixă.

Cu această definiţie avem proprietatea:

Curbele pentru care raportul dintre razele de curbură şi de torsiune este constant sînt elice.

Prin ipoteză ni se dă

$$\frac{R}{T} = k, \qquad (k = \text{const.}).$$

Cu această relaţie, primele două formule ale lui Frenet ne dau

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = k\,\frac{d\vec{t}}{ds},$$

sau, integrînd,

$$\vec{b} = k\vec{t} + \vec{a}, \qquad (20)$$

$\vec{a}$ fiind un vector constant.

Inmulţind scalar relaţia (20) cu $\vec{t}$, obţinem

$$\vec{a} \cdot \vec{t} = k. \qquad (20')$$

Ridicînd la pătrat relaţia (20) şi ţinînd seama că vectorii $\vec{t}$ şi $\vec{b}$ sînt unitari, obţinem

$$k^2 + 2k\,\vec{a}\cdot\vec{t} + \vec{a}^2 = 1,$$

de unde, în baza relaţiei (20'),

$$\vec{a}^2 = 1 + k^2.$$

Notînd cu θ unghiul dintre tangenta la curbă şi direcţia fixă de vector $\vec{a}$, din (20') obţinem

$$\cos\theta = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},$$

deci θ = const. şi curba este o elice.

Să demonstrăm următoarea teoremă:

<u>O curbă pentru care torsiunea este nulă este curbă plană.</u>

Să considerăm deci o curbă pentru care $\frac{1}{T} = 0$. Din a doua formulă a lui Frenet deducem

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = 0,$$

de unde rezultă că

$$\vec{b} = \vec{b}_o,$$

unde $\vec{b}_o$ este un vector constant.

Dacă înmulţim scalar această relaţie cu $\vec{t}$, obţinem

$$\vec{b}_o \cdot \vec{t} = 0.$$

Dar, dacă notăm cu $\vec{r}$ vectorul de poziţie al punctului M al curbei, avem

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

şi deci

$$\vec{b}_o \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0.$$

Integrînd obţinem

$$\vec{b}_o \cdot \vec{r} = D, \qquad (D=\text{const.}).$$

Notînd cu A, B, C componentele vectorului constant $\vec{b}_o$, această relaţie devine

$$Ax + By + Cz = D,$$

unde x, y, z sînt coordonatele punctului M.

De aici rezultă că curba este plană.

Ca aplicaţie să determinăm curbura şi torsiunea curbei ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \frac{2t^3}{3}.$$

Avem

$$x' = 1, \quad y' = 2t, \quad z' = 2t^2,$$
$$x'' = 0, \quad y'' = 2, \quad z'' = 4t,$$
$$x''' = 0, \quad y''' = 0, \quad z''' = 4,$$

deci

$$A = 4t^2, \quad B = -4t, \quad C = 2, \quad \Delta = 8,$$

adică

$$\frac{1}{R^2} = \frac{16t^4 + 16t^2 + 4}{(4t^4 + 4t^2 + 1)^3},$$

de unde

$$R = \frac{(1 + 2t^2)^2}{2}.$$

De asemenea găsim

$$T = -\frac{(1+2t^2)^2}{2}.$$

Pentru această curbă avem $R = -T$, deci curba este o elice.

7. Cerc şi sferă osculatoare la o curbă strîmbă

Fiind dată o curbă strîmbă şi un punct ordinar M_o, în care tangenta la curbă nu este staţionară, cercul din planul osculator la curbă în M_o care întîlneşte curba în trei puncte

confundate în acest punct se numeşte <u>cercul osculator</u> al curbei în M_o.

Fie

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

ecuaţiile parametrice ale curbei, s fiind arcul pe curbă şi fie $M_o(s_o)$ un punct ordinar nestaţionar al ei.

Să considerăm acum un cerc tangent la tangenta la curbă în M_o şi care trece printr-un punct M_1 de pe curbă. Cînd $M_1 \longrightarrow M_o$, acest cerc tinde către cercul osculator la curbă în punctul M_o.

De aici rezultă că centrul cercului osculator se află pe normala principală la curbă în punctul M_o. Dacă notăm cu α_1^o, β_1^o, γ_1^o cosinusurile directoare ale normalei principale la curbă în M_o şi cu r raza cercului osculator, coordonatele centrului cercului osculator sînt

$$a = x_o + \alpha_1^o r, \quad b = y_o + \beta_1^o r, \quad c = z_o + \gamma_1^o r,$$

unde am notat $x_o = x(s_o)$ etc.

Ecuaţia sferei care intersectează planul osculator după cercul osculator este

$$(x-x_o-\alpha_1^o r)^2 + (y-y_o-\beta_1^o r) + (z-z_o-\gamma_1^o r) - r^2 = 0.$$

Dezvoltînd funcţiile x(s), y(s), z(s) în serie Taylor în jurul punctului s_o, obţinem

$$x(s)-x_o = \frac{s-s_o}{1!}\left(\frac{dx}{ds}\right)_o + \frac{(s-s_o)^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o + \ldots,$$

unde derivatele sînt calculate în punctul s_o şi formule analoge pentru y şi z.

Abscisele curbilinii ale punctelor de intersecţie ale cercului cu curba se obţin înlocuind aceste expresii ale diferenţelor $x(s)-x_o, \ldots,$ în ecuaţia sferei şi rezolvînd apoi ecuaţia obţinută, adică

$$-2r(s-s_o)\sum \alpha_1^o\left(\frac{dx}{ds}\right)_o + (s-s_o)^2\left[\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)_o^2 - r\sum \alpha_1^o\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o\right]+\ldots=0$$

unde suma este extinsă la literele α, β, γ, respectiv x, y, z.

Dar, dacă notăm cu α^o, β^o, γ^o cosinusurile directoare ale tangentei la curbă în M_o şi cu R_o, raza de curbură a curbei în acest punct avem

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_o = \alpha^o, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_o = \beta^o, \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_o = \gamma^o,$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o = \frac{\alpha_1^o}{R}, \quad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o = \frac{\beta_1^o}{R_o}, \quad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o = \frac{\gamma_1^o}{R_o},$$

deci ecuaţia de mai sus devine

$$(s-s_o)^2\left(1 - \frac{r}{R_o}\right) + \ldots = 0,$$

termenii nescrişi fiind de gradul trei şi superior în $s-s_o$.

Cercul are deci trei puncte confundate cu curba în M_o, dacă $r = R_o$.

Deci, <u>centrul cercului osculator la o curbă strîmbă într-un punct ordinar nestaţionar al ei este pe normala principală la curbă în acest punct, iar raza lui este egală cu raza de curbură a curbei în punctul respectiv</u>.

Cercul osculator se mai numeşte <u>cerc de curbură</u> al curbei în punctul respectiv, iar centrul lui se numeşte <u>centru de curbură</u>.

Fiind dată o curbă strîmbă şi un punct ordinar al ei M_o, sfera care intersectează curba în patru puncte confundate în M_o se numeşte <u>sfera osculatoare</u> a curbei în punctul M_o.

Să considerăm o curbă strîmbă ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

s fiind arcul pe curbă şi fie $M_o(s_o)$ un punct ordinar al ei.

Fie

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 - r^2 = 0, \qquad (21)$$

ecuaţia unei sfere cu centrul în punctul $\Omega\,(a,b,c)$ şi cu raza r.

Pentru ca sfera (21) să treacă prin M, trebuie ca

$$\left[x(s_o)-a\right]^2 + \left[y(s_o)-b\right]^2 + \left[z(s_o)-c\right]^2 - r^2 = 0. \qquad (22)$$

Să dezvoltăm funcţiile x(s), y(s) şi z(s) în serie Taylor în jurul punctului s_o. Avem

$$x(s) = x(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \frac{(s-s_0)^3}{3!}\left(\frac{d^2x}{ds^3}\right)_0 + \ldots,$$

unde derivatele sînt calculate în punctul s_0 şi formule analoge pentru y(s) şi z(s).

Punctele de intersecţie ale sferei (21) cu curba au ca abscise curbilinii soluţiile ecuaţiei

$$\sum\left[x(s_0)-a+\frac{s-s_0}{1!}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+\frac{(s-s_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0+\frac{(s-s_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0+\ldots\right]^2-r^2=0,$$

suma fiind extinsă asupra literelor x, y, z, respectiv a,b,c.

Ţinînd seama de condiţia (22), această ecuaţie se poate scrie

$$2(s-s_0)\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+(s-s_0)^2\left[\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0\right]+$$

$$+(s-s_0)^3\left[\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0+\frac{1}{3}\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0\right]+\ldots=0. \qquad (23)$$

Dacă notăm cu α, β, γ cosinusurile directoare ale tangentei la curbă în punctul M(s), cu α_1, β_1, γ_1 cosinusurile directoare ale normalei principale, cu α_2, β_2, γ_2 cosinusurile directoare ale binormalei şi cu R,T razele de curbură şi torsiune ale curbei în acelaşi punct, avem

$$\alpha=\frac{dx}{ds}, \qquad \beta=\frac{dy}{ds}, \qquad \gamma=\frac{dz}{ds},$$

$$\alpha_1=R\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \beta_1=R\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \gamma_1=R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

De aici rezultă că avem

$$\frac{d^3x}{ds^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)=\frac{1}{R}\frac{d\alpha_1}{ds}-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\alpha_1$$

şi, ţinînd seama de a treia formulă a lui Frenet,

$$\frac{d^3x}{ds^3}=-\frac{1}{R^2}\alpha-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\alpha_1-\frac{1}{RT}\alpha_2$$

şi formule analoge pentru derivatele lui y şi z.

Insemnînd cu $\alpha^0,\ldots$ cosinusurile directoare ale muchi - ilor triedrului lui Frenet calculat în $M_0(s_0)$ şi cu R_0, T_0 razele de curbură şi torsiune calculate în acelaşi punct, avem

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \alpha^0, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = \beta^0, \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = \gamma^0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = \frac{\alpha_1^0}{R_0}, \quad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = \frac{\beta_1^0}{R_0}, \quad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = \frac{\gamma_1^0}{R_0},$$

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{R_0^2}\left[\alpha^0 + \left(\frac{dR}{ds}\right)_0 \alpha_1^0\right] - \frac{1}{R_0 T_0}\alpha_2^0,\ldots$$

Cu aceste formule, obţinem

$$\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \sum\alpha^0\left[x(s_0)-a\right], \quad \sum\left(\frac{dx}{ds}\right)_0^2 = 1,$$

$$\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{R_0}\sum\alpha_1^0\left[x(s_0)-a\right], \quad \sum\left(\frac{dx}{ds}\right)_0\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = 0,$$

$$\sum\left[x(s_0)-a\right]\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{R_0^2}\sum\left[x(s_0)-a\right]\alpha^0 - \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0\sum\left[x(s_0)-a\right]\alpha_1^0 - \frac{1}{R_0 T_0}\sum\left[x(s_0)-a\right]\alpha_2^0.$$

Pentru ca ecuaţia (23) să aibă rădăcina $s=s_0$ multiplă de ordinul (4), trebuie ca

$$\begin{cases} \alpha^0\left[x(s_0)-a\right] + \beta^0\left[y(s_0)-b\right] + \gamma^0\left[z(s_0)-c\right] = 0, \\ \alpha_1^0\left[x(s_0)-a\right] + \beta_1^0\left[z(s_0)-b\right] + \gamma_1^0\left[z(s_0)-c\right] = -R_0, \\ \alpha_2^0\left[x(s_0)-a\right] + \beta_2^0\left[y(s_0)-b\right] + \gamma_2^0\left[z(s_0)-c\right] = T\left(\frac{dR}{ds}\right)_0. \end{cases} \tag{24}$$

Ţinînd seama că versorii $\vec{t}_0(\alpha^0,\beta^0,\gamma^0)$, $\vec{n}_0(\alpha_1^0,\beta_1^0,\gamma_1^0)$, $\vec{b}_0(\alpha_2^0,\beta_2^0,\gamma_2^0)$ formează un triedru tridreptunghic, rezultă că

$$\begin{vmatrix} \alpha^0 & \beta^0 & \gamma^0 \\ \alpha_1^0 & \beta_1^0 & \gamma_1^0 \\ \alpha_2^0 & \beta_2^0 & \gamma_2^0 \end{vmatrix} = 1,$$

reciprocii diverselor elemente ale acestui determinant fiind egali cu elementele respective.

Soluţia sistemului (24) este deci

$$a = x(s_0) + R_0 \alpha_1^0 - T_0\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 \alpha_2^0 ,$$

$$b = y(s_0) + R_0 \beta_1^0 - T_0\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 \beta_2^0 ,$$

$$c = z(s_0) + R_0 \gamma_1^0 - T_0\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 \gamma_2^0 .$$

Acestea sînt coordonatele centrului sferei osculatoare la curbă în punctul $M(s_0)$.

Inlocuind aceste valori în relaţia (22), obţinem expresia razei sferei osculatoare

$$r^2 = \sum \left[R_0 \alpha_1^0 - T_0 \left(\frac{dR}{ds}\right)_0 \alpha_2^0\right]^2 ,$$

suma fiind extinsă la literele α, β, γ, sau, avînd în vedere că $\vec{n}_0$ şi $\vec{b}_0$ sînt versori ortogonali,

$$r^2 = R_0^2 + T_0^2\left(\frac{dR}{ds}\right)_0^2 .$$

8. Înfăşurătoarea unei familii de curbe strîmbe

Să considerăm o familie de curbe strîmbe depinzînd de un parametru ale cărei ecuaţii sînt

$$F(x,y,z,\lambda) = 0, \qquad G(x,y,z,\lambda) = 0, \qquad (25)$$

unde λ este un parametru.

Dacă există o curbă (Γ) care să fie tangentă în fiecare punct al ei la cîte o curbă din familia (25), această curbă se numeşte înfăşurătoarea familiei de curbe (25).

Vom presupune deci că familia de curbe (25) admite o înfăşurătoare (Γ) şi fie M punctul de contact al curbei (Γ) cu curba (C_λ) din familie corespunzătoare valorii λ a parametrului. Punctul M se numeşte punctul caracteristic al curbei (C_λ). Coordonatele punctului M depind de valoarea lui λ.

Fie deci

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda) \tag{26}$$

coordonatele punctului M.

Ecuaţiile (26) sînt ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii familiei de curbe (25).

Vom presupune că punctul M este punct ordinar şi pentru curba (Γ) şi pentru curba (C_λ). Cele două curbe fiind tangente în punctul M, rezultă că

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}_x = \frac{D(F,G)}{D(z,x)}_y = \frac{D(F,G)}{D(x,y)}_z . \tag{27}$$

Se verifică imediat că avem

$$F'_x \frac{D(F,G)}{D(y,z)} + F'_y \frac{D(F,G)}{D(z,x)} + F'_z \frac{D(F,G)}{D(x,y)} = 0,$$

$$G'_x \frac{D(F,G)}{D(y,z)} + G'_y \frac{D(F,G)}{D(z,x)} + G'_z \frac{D(F,G)}{D(x,y)} = 0.$$

Inlocuind aici relaţiile (27), deducem

$$\begin{aligned} F'_x \cdot x' + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' &= 0 \\ G'_x \cdot x' + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' &= 0. \end{aligned} \qquad \left(x' = \frac{dx}{d\lambda}, \ldots\right) \tag{28}$$

Pe de altă parte, punctul M fiind pe curba (25), rezultă că

$$F[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0,$$

$$G[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0,$$

de unde, derivînd în raport cu λ şi, ţinînd seama de (28), rezultă

$$F'_\lambda = 0, \quad G'_\lambda = 0. \tag{29}$$

Deci, dacă familia de curbe (25) are o înfăşurătoare, coordonatele unui punct curent ordinar al ei verifică sistemul (25), (29).

Dar sistemul (25), (29), fiind un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute x, y, z, este în general incompatibil, deci în general o familie de curbe strîmbe nu admite înfăşurătoare.

Să demonstrăm următoarea teoremă:

Dacă sistemul (25), (29) este compatibil pentru orice λ, avînd soluţia (26) şi dacă

$$\left[\frac{D(F,G,F'_\lambda)}{D(x,y,z)}\right]^2 + \left[\frac{D(F,G,G'_\lambda)}{D(x,y,z)}\right]^2 \neq 0, \qquad (30)$$

$$(F''_\lambda)^2 + (G''_\lambda)^2 \neq 0, \qquad (30')$$

atunci familia de curbe (25) admite ca înfăşurătoare curba (26).

Intr-adevăr, fie M punctul ale cărui coordonate sînt (26).

Din relaţia (30) rezultă că cel puţin unul din cei doi determinanţi funcţionali este nenul, de exemplu

$$\frac{D(F,G,F'_\lambda)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ F''_{\lambda x} & F''_{\lambda y} & F''_{\lambda z} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (31)$$

De aici rezultă că cel puţin unul din determinanţii

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \quad \frac{D(F,G)}{D(z,x)}, \quad \frac{D(F,G)}{D(x,y)} \qquad (32)$$

este nenul, deci punctul M este punct ordinar pentru curba (C_λ).

In baza aceleiaşi relaţii (31) rezultă că putem rezolva sistemul

$$F = 0, \quad G = 0, \quad F'_\lambda = 0,$$

în raport cu x, y, z, prin soluţii de forma (26).

Cu acestea avem

$$F[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0,$$
$$G[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0,$$
$$F'_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0,$$
$$G'_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda] = 0.$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu λ, obţinem relaţiile (28) şi

$$F''_{\lambda x}x' + F''_{\lambda y}y' + F''_{\lambda z}z' + F''_{\lambda 2} = 0,$$
$$G''_{\lambda x}x' + G''_{\lambda y}y' + G''_{\lambda z}z' + G''_{\lambda 2} = 0,$$

de unde, ţinînd seama de relaţia (30'), rezultă că cel puţin una din derivatele x', y', z' este nenulă, deci punctul M este punct ordinar pentru curba (26).

De asemenea, din relaţiile (28) rezultă că x', y', z' sînt proporţionali cu determinanţii funcţionali (32), deci curba (26) este tangentă la curba (C_λ) în punctul M.

Curba (26) este deci înfăşurătoarea familiei de curbe (25).

9. Evoluta şi evolventa unei curbe strîmbe

Fiind dată o curbă strîmbă, normalele la această curbă formează o familie depinzînd de doi parametri, şi anume arcul pe curbă şi unghiul dintre normala principală şi normala considerată.

Dacă există o familie de normale depinzînd de un parametru care să admită o înfăşurătoare, această înfăşurătoare se numeşte o evolută a curbei date.

Cu alte cuvinte, o curbă care este tangentă în fiecare punct ordinar al ei la o normală a unei curbe date este o evolută a acesteia.

In legătură cu această noţiune să demonstrăm teorema:

Locul geometric al centrilor de curbură ai unei curbe strîmbe este o evolută a ei.

Fie o curbă strîmbă (C) a cărei ecuaţie vectorială este

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}.$$

Centrul de curbură ω al acestei curbe în punctul M(s) are coordonatele

$$a = x(s) + R\alpha_1, \qquad b = y(s) + R\beta_1, \qquad c = z(s) + R\gamma_1,$$

unde R este raza de curbură a curbei în punctul M, iar α_1, β_1, γ_1 sînt cosinusurile directoare ale normalei principale la curbă.

Locul geometric al punctului ω este o curbă (Γ), a cărei ecuaţie vectorială este

$$\vec{\rho} = \vec{r}(s) + R\,\vec{n},$$

unde $\vec{\rho}$ este vectorul de poziţie al unui punct al curbei (Γ), iar $\vec{n}$ versorul normalei principale la curba (C).

Derivînd această ecuaţie în raport cu s, obţinem

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} + R\,\frac{d\vec{n}}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\vec{n}.$$

Dar

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}, \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T},$$

deci

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds} = \frac{dR}{ds}\cdot\vec{n} - \frac{R}{T}\vec{b}.$$

Rezultă că vectorul $\frac{d\vec{\rho}}{ds}$ este situat în planul vectorilor $\vec{n}$ şi $\vec{b}$, deci în planul normal la curbă.

Pe de altă parte, $\frac{d\vec{\rho}}{ds}$ este situat pe tangenta la curba (Γ).

Deci, tangenta la curba (Γ) este normală la curba (C), de unde rezultă că (Γ) este o evolută a curbei (C).

<u>O curbă (Γ) a cărei evolută este o curbă dată (C) se numeşte evolventa curbei date</u>.

Ţinînd seama de definiţia evolutei unei curbe, rezultă că <u>evolventa unei curbe date este o curbă ale cărei normale sînt tangente la curba dată</u>.

Fie deci o curbă strîmbă (C), a cărei ecuaţie vectorială este

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

şi (Γ) evolventa ei.

Să notăm cu $\vec{\rho}$ vectorul de poziţie al punctului curbei (Γ) situat pe tangenta la curba (C) în punctul $M(s)$.

De aici rezultă că, dacă notăm cu $\vec{t}$ versorul tangentei la curba (C), avem

$$\vec{\rho} = \vec{r}(s) + \lambda(s)\,\vec{t}(s), \qquad (33)$$

unde $\lambda(s)$ este o funcţie pe care o vom determina.

Derivînd această relaţie în raport cu s şi ţinînd seama că

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}, \qquad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

obţinem

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right)\vec{t} + \frac{\lambda}{R}\vec{n}. \qquad (33')$$

Dar vectorul $\frac{d\vec{\rho}}{ds}$ este situat pe tangenta la curba (Γ) şi, în baza definiţiei acestei curbe, el este perpendicular pe tangenta la curba (C). Deci, înmulţind scalar ecuaţia (33'), obţinem

$$0 = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right)\vec{t}^{\,2} + \frac{\lambda}{R}\vec{n}\cdot\vec{t},$$

de unde deducem

$$\frac{d\lambda}{ds} + 1 = 0,$$

adică

$$\lambda = k - s, \qquad (k=\text{const.})$$

Ecuaţia vectorială a evolventei este deci

$$\vec{\rho} = \vec{r}(s) + (k-s)\vec{t}(s).$$

Rezultă că o curbă dată are o infinitate de evolvente.

10. Contactul a două curbe strîmbe

Să considerăm două curbe strîmbe (C_1) şi (C_2) tangente în punctul M_o, care este punct ordinar pentru amîndouă. Fie M_1 şi M_2 două puncte pe curba (C_1) respectiv (C_2), de aceeaşi parte a planului normal în M_o la cele două curbe, astfel încît

$$\text{arc } M_oM_1 = \text{arc } M_oM_2.$$

Vom nota arc $M_oM_1 = s$.

Spunem că cele două curbe au în punctul M_o un contact de ordinul n, dacă

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}}$$

este finită şi diferită de zero.

In legătură cu această noţiune să demonstrăm teorema:

Fiind date două curbe strîmbe (C_1) şi (C_2) ale căror ecuaţii vectoriale sînt

$$(C_1) : \vec{r} = \vec{r}_1(s),$$

$$(C_2) : \vec{r} = \vec{r}_2(s),$$

s fiind arcul pe curba (C_1), condiţia necesară şi suficientă ca aceste curbe să aibă un contact de ordinul n în punctul $M_0(s=0)$ este ca

$$\vec{r}_1(0)=\vec{r}_2(0), \quad \vec{r}_1'(0)=\vec{r}_2'(0), \ldots, \quad \vec{r}_1^{(n)}(0)=\vec{r}_2^{(n)}(0),$$

$$\vec{r}_1^{(n+1)}(0) \neq \vec{r}_2^{(n+1)}(0). \tag{34}$$

Într-adevăr, dacă dezvoltăm funcţia $\vec{r}_1(s)$ în serie Taylor în jurul originii avem

$$\vec{r}_1(s)=\vec{r}_1(0)+\frac{s}{1!}\vec{r}_1'(0)+\ldots+\frac{s^n}{n!}\vec{r}_1^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[\vec{r}_1^{(n+1)}(0) + \vec{\varepsilon}_1\right], \tag{35}$$

unde $\vec{\varepsilon}_1$ este un vector care tinde la zero cînd $s \longrightarrow 0$.

Dezvoltînd şi funcţia $\vec{r}_2(s)$ în serie Taylor în jurul originii şi ţinînd seama de relaţiile (34), obţinem

$$\vec{r}_2(s)=\vec{r}_1(0)+\frac{s}{1!}\vec{r}_1'(0)+\ldots+\frac{s^n}{n!}\vec{r}_1^{(n)}(0) + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[\vec{r}_2^{(n+1)}(0) + \vec{\varepsilon}_2\right], \tag{35'}$$

unde $\vec{\varepsilon}_2 \longrightarrow 0$ cînd $s \longrightarrow 0$.

Din (35) şi (35') rezultă

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left[\vec{r}_2^{(n+1)}(0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(0) + \vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_1\right].$$

De aici deducem

$$\overline{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\left|\vec{r}_2^{(n+1)}(0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(0) + \vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_1\right|.$$

Rezultă că

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{s^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\left|\vec{r}_2^{(n+1)}(0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(0)\right| \neq 0,$$

deci cele două puncte au în punctul M_o un contact de ordinul n.

Reciproc, dacă cele două curbe au un contact de ordinul n, nu putem avea

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0), \quad \vec{r}_1'(0) = \vec{r}_2'(0), \ldots, \vec{r}_1^{(p)}(0) = \vec{r}_2^{(p)}(0),$$

$$\vec{r}_1^{(p+1)}(0) \neq \vec{r}_2^{(p+1)}(0), \quad (p \neq n)$$

căci în acest caz cele două curbe ar avea un contact de ordinul $p \neq n$. Rezultă că sînt verificate relațiile (34).

Capitolul III

SUPRAFEŢE

1. Reprezentările analitice ale unei suprafeţe

Să considerăm spaţiul cu trei dimensiuni raportat la un sistem de axe carteziene ortogonale Oxyz.

O mulţime de puncte din spaţiu homeomorfă cu mulţimea punctelor din interiorul unei curbe simple închise dintr-un plan se numeşte porţiune simplă de suprafaţă.

Dacă notăm cu u, v coordonatele unui punct din interiorul curbei considerate şi cu x, y, z coordonatele punctului corespunzător din spaţiu, atunci avem

$$x = f(u,v), \quad y = \varphi(u,v), \quad z = \psi(u,v). \tag{1}$$

Pentru ca aceste ecuaţii să definească o porţiune simplă de suprafaţă, trebuie ca funcţiile f, φ, ψ să fie continue în tot interiorul curbei considerate.

De asemenea, corespondenţa fiind biunivocă, trebuie ca, dacă $M_1(u_1,v_1) \neq M_2(u_2,v_2)$, să avem $P_1(x_1, y_1, z_1) \neq P_2(x_2,y_2,z_2)$, unde

$$x_i = f(u_i,v_i), \quad y_i = \varphi(u_i,x_i), \quad z_i = \psi(z_i,v_i), \quad (i=1,2).$$

Dacă pentru u şi v considerăm toate valorile în care funcţiile f, φ şi ψ sînt definitive şi au proprietăţile de mai sus, spunem că ecuaţiile (1) reprezintă o suprafaţă. Ecuaţiile (1) se numesc ecuaţiile parametrice ale suprafeţei. Variabilele u şi v se numesc parametri sau coordonate curbilinii pe suprafaţă. Vom nota un punct de pe suprafaţa (1) cu $M(u_o,v_o)$.

In cele ce urmează vom presupune că funcţiile f, φ, ψ sînt continue şi admit derivate parţiale continue de cel puţin două ordine.

Dacă notăm cu $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vectorul de poziţie al punctului curent al suprafeţei (1), ecuaţia

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1')$$

se numeşte ecuaţia vectorială a suprafeţei.

O suprafaţă poate fi reprezentată şi prin ecuaţia explicită

$$z = f(x,y). \qquad (1'')$$

Intr-adevăr, dacă luăm aici $x = u$, $y = v$, obţinem o reprezentare de forma (1).

O altă formă a ecuaţiei unei suprafeţe este

$$F(x,y,z) = 0, \qquad (1''')$$

numită ecuaţia implicită a suprafeţei.

Dacă presupunem că una din derivatele parţiale ale funcţiei F este nenulă, de exemplu $F'_z \neq 0$, putem rezolva ecuaţia (1''') în raport cu z printr-o expresie de forma (1''), deci (1''') reprezintă o suprafaţă.

Punctele $M(u,v)$ al suprafeţei (1), pentru care

$$F(u,v) = 0, \qquad (2)$$

formează o curbă situată pe suprafaţă.

Intr-adevăr, dacă $F'_v \neq 0$, putem rezolva ecuaţia (2) în raport cu v

$$v = v(u),$$

deci coordonatele punctelor suprafeţei care satisfac la condiţia dată sînt

$$x = f\left[u, v(u)\right], \quad y = \varphi\left[u, v(u)\right], \quad z = \psi\left[u, v(u)\right],$$

adică formează o curbă situată pe suprafaţă.

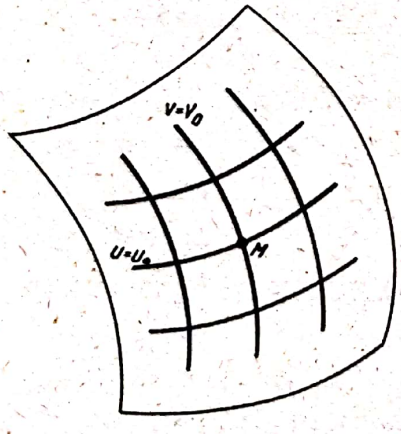


Fig.19

Curbele $u=\text{const.}$, respectiv $v=\text{const.}$ de pe suprafaţă se numesc <u>curbe coordonate</u>.

Dacă ecuaţia implicită a suprafeţei este o ecuaţie algebrică de gradul n, suprafaţa se numeşte

suprafaţă algebrică de gradul n. O suprafaţă care nu este algebrică se numeşte transcendentă.

2. Planul tangent şi normala la o suprafaţă

O dreaptă care intersectează o suprafaţă în două puncte confundate se numeşte tangentă la suprafaţă.

Să considerăm suprafaţa a cărei ecuaţie implicită este ecuaţia (1"') şi fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct al ei, adică

$$F(x_0,y_0,z_0) = 0. \qquad (3)$$

Ecuaţiile parametrice ale unei drepte care trece prin M_0 sînt

$$x = x_0 + \rho\ell\,, \qquad y = y_0 + \rho m, \qquad z = z_0 + \rho n, \qquad (4)$$

unde ℓ, m, n sînt parametrii directori ai dreptei, iar ρ un parametru.

Punctele de intersecţie ale acestei drepte cu suprafaţa (1"') se obţin înlocuind în ecuaţia suprafeţei pe x, y, z cu valorile date de (4). Obţinem ecuaţia în ρ,

$$F(x_0 + \rho\ell\,,\ y_0 + \rho m,\ z_0 + \rho n) = 0.$$

Dezvoltînd această funcţie în serie Taylor în jurul punctului M şi ţinînd seama de (3), deducem

$$\rho(\ell F'_{x_0} + mF'_{y_0} + nF'_{z_0}) + \frac{\rho^2}{2!}\left(\ell^2 F''_{x_0^2} + m^2 F_{y_0^2} + n^2 F''_{z_0^2} + \right.$$

$$\left. + 2\ell m F''_{x_0y_0} + 2mnF_{y_0z_0} + 2\ell n F_{x_0z_0}\right) + \ldots = 0, \qquad (5)$$

unde F'_{x_0} este derivata F'_x calculată în punctul M_0, iar termenii nescrişi conţin pe ρ cel puţin la puterea a treia.

Pentru ca dreapta (4) să intersecteze suprafaţa (1"') în două puncte confundate în M_0, trebuie ca ecuaţia (5) să aibă o rădăcină dublă $\rho = 0$, adică trebuie ca

$$\ell F'_{x_0} + mF'_{y_0} + nF'_{z_0} = 0.$$

Inlocuind pe ℓ, m, n cu valorile date de (4), obţinem

$$F'_{x_o}(x-x_o)+F'_{y_o}(y-y_o)+F'_{z_o}(z-z_o) = 0, \qquad (6)$$

care este ecuaţia unui plan ce trece prin M_o.

Acest plan conţine toate tangentele la suprafaţa (1"')în punctul M_o şi se numeşte planul tangent la suprafaţă în punctul M_o.

Presupunînd că, în punctul M_o, cel puţin una din derivatele parţiale ale funcţiei $F(x,y,z)$ este nenulă, ecuaţia (6) a planului tangent la suprafaţă este bine determinată şi punctul M_o se numeşte punct ordinar al suprafeţei.

Deci, tangentele la o suprafaţă într-un punct ordinar al ei formează un plan, planul tangent la suprafaţă în punctul respectiv.

Să presupunem acum că în punctul M_o avem

$$F'_{x_o} = F'_{y_o} = F'_{z_o} = 0.$$

In acest caz, punctul se numeşte punct singular al suprafeţei.

Dacă prima derivată parţială a funcţiei $F(x,y,z)$ care nu se anulează în punctul M_o este de ordinul p, punctul se numeşte punct singular de ordinul p.

Intr-un punct singular de ordinul p, ecuaţia (5) are rădăcina $\rho = 0$, multiplă de ordinul p.

Deci, orice dreaptă care trece printr-un punct singular de ordinul p al unei suprafeţe o întîlneşte în p puncte confundate în acesta.

Dacă o dreaptă intersectează suprafaţa în p+1 puncte confundate în punctul M_o care este singular de ordinul p, dreapta se numeşte tangentă la suprafaţă în punctul singular.

Să considerăm cazul în care punctul M_o este un punct singular de ordinul doi. In acest caz, pentru ca dreapta (5) să fie tangentă la suprafaţă, trebuie ca ecuaţia (5) să aibă rădăcina $\rho = 0$ multiplă de ordinul trei, adică trebuie ca

$$\ell^2 F''_{x_o^2} + m^2 F''_{y_o^2} + n^2 F''_{z_o^2} + 2\ell m F''_{x_o y_o} + 2\ell n F''_{x_o z_o} + 2mn F''_{y_o z_o} = 0.$$

Inlocuind aici pe ℓ, m, n cu valorile date de (4), obţinem ecuaţia

$$F''_{x_0^2}(x-x_0)^2+F''_{y_0^2}(y-y_0)^2+F''_{z_0^2}(z-z_0)^2+2F''_{x_0y_0}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+2F''_{x_0z_0}(x-x_0)(z-z_0)+2F''_{y_0z_0}(y-y_0)(z-z_0)=0. \qquad (7)$$

Această ecuaţie reprezintă un con de ordinul doi.

Deci, <u>tangentele la o suprafaţă într-un punct singular de ordinul doi M_0 sînt situate pe conul (7), numit conul tangentelor în M_0</u>.

Dacă punctele singulare ale unei suprafeţe formează o curbă, aceasta se numeşte linie sau <u>curbă singulară</u> a suprafeţei.

Să presupunem acum că suprafaţa este dată prin ecuaţiile parametrice (1) şi fie $M_0(u_0,v_0)$ un punct ordinar al suprafeţei.

Să considerăm curbele coordonate $u=u_0$ şi $v=v_0$.

Ecuaţiile parametrice ale curbei $u=u_0$ sînt

$$x=f(u_0,v),\quad y=\varphi(u_0,v),\quad z=\psi(u_0,v).$$

Tangenta la curba $u=u_0$ are deci în punctul M_0 parametrii directori proporţionali cu f'_{v_0}, φ'_{v_0}, ψ'_{v_0}, derivatele fiind calculate în punctul M_0.

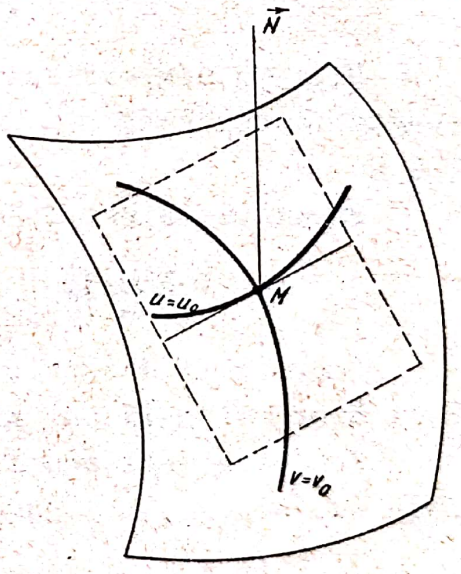


Fig.20

De asemenea, ecuaţiile parametrice ale curbei $v=v_0$ sînt

$$x=f(u,v_0),\quad y=\varphi(u,v_0),\quad z=\psi(u,v_0)$$

şi deci parametrii directori ai tangentei la această curbă sînt proporţionali cu f'_{u_0}, φ'_{u_0}, ψ'_{u_0}.

Planul tangent la suprafaţă în punctul M_0 este determinat de două tangente oarecare la suprafaţă în acest punct deci, în particular, de tangentele la curbele $u=u_0$ şi $v=v_0$.

Planul tangent la suprafaţa (1) are deci ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-f(u_o,v_o) & y-\varphi(u_o,v_o) & z-\psi(u_o,v_o) \\ f'_{u_o} & \varphi'_{u_o} & \psi'_{u_o} \\ f'_{v_o} & \varphi'_{v_o} & \psi'_{v_o} \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă notăm

$$A = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}, \qquad B = \frac{D(\varphi,f)}{D(u,v)}, \qquad C = \frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)},$$

ecuaţia planului tangent la suprafaţă în planul ordinar $M(u,v)$ este

$$A\left[x-f(u,v)\right] + B\left[y-\varphi(u,v)\right] + C\left[z-\psi(u,v)\right] = 0.$$

Condiţia ca punctul M să fie un punct ordinar al suprafeţei (1) este deci ca cel puţin unul din determinanţii funcţionali A, B, C să fie nenul în punctul M, adică

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Dreapta perpendiculară pe planul tangent la suprafaţă în punctul ordinar M se numeşte <u>normala la suprafaţa în punctul M</u>.

Ecuaţiile acestei drepte sînt

$$\frac{x-f(u,v)}{A} = \frac{y-\varphi(u,v)}{B} = \frac{z-\psi(u,v)}{C}.$$

Parametrii directori ai normalei la suprafaţa (1) sînt deci proporţionali cu A, B, C.

Vom nota cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţa cu λ, μ, ν, adică

$$\lambda = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \mu = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \nu = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Vectorul de componente λ, μ, ν este versorul normalei la suprafaţă. Vom nota acest vector cu N.

Ca aplicaţie să determinăm punctele singulare ale suprafeţelor algebrice

$1^o.\ x^3y + xy^3 - z^2 = 0$

$2^o.\ x^3+y^3+z-3xyz = 0$

şi ale suprafeţei transcendente, numită pseudosferă[1].

3^0. $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$,

$$z = a(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}).$$

In cazul 1^0, punctele singulare sînt punctele suprafeţei care satisfac sistemul

$$F'_x = 3x^2y + y^3 = 0, \quad F'_y = x^3 + 3xy^2 = 0, \quad F'_z = -2z = 0.$$

Soluţia reală a acestui sistem este $x = y = z = 0$, care verifică ecuaţia suprafeţei, deci suprafaţa 1^0 are un singur punct singular real, şi anume $O(0,0,0)$.

Conul tangentelor în acest punct are ecuaţia

$$z^2 = 0,$$

deci se reduce la planul xOy luat de două ori.

In cazul 2^0, sistemul care determină punctele singulare este

$$x^2 - yz = 0, \quad y^2 - xz = 0, \quad z^2 - yz = 0,$$

avînd ca soluţie reală $x = y = z$ care verifică şi ecuaţia suprafeţei.

Deci, suprafaţa 2^0 are o curbă singulară, şi anume dreapta $x = y = z$.

Calculînd derivatele de ordinul doi ale funcţiei $F(x,y,z)$, obţinem

$$F''_{x^2} = 6x, \quad F''_{y^2} = 6y, \quad F''_{z^2} = 6z, \quad F''_{xy} = -3z,$$

$$F''_{xz} = -3y, \quad F''_{yz} = -3x.$$

De aici rezultă că originea axelor de coordonate este un punct triplu pentru suprafaţă, celelalte puncte ale dreptei singulare fiind puncte duble.

In cazul 3^0, parametrii directori ai normalei la suprafaţă sînt

$$A = -a^2 \cos^2 u \cos v, \quad B = -a^2 \cos^2 u \sin v,$$

$$C = a^2 \sin u \cos u.$$

---

[1] Pe pseudosferă se poate reprezenta geometria lui Lobacevski, vezi [15], p.588.

Sistemul care determină punctele singulare este

$$\cos^2 u \cos v = 0, \quad \cos^2 u \sin v = 0, \quad \sin u \cos u = 0,$$

avînd soluţia $\cos u = 0$, adică

$$u = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Punctele singulare ale pseudosferei formează deci curba de ecuaţii parametrice

$$x = \pm a \cos v, \quad y = \pm a \sin v, \quad z = 0,$$

adică un cerc cu centrul în origine şi raza a, situat în planul xOy.

3. Suprafeţe riglate şi desfăşurabile

O suprafaţă generată prin mişcarea unei drepte se numeşte suprafaţă riglată. Dreptele care generează suprafaţa se numesc generatoarele ei.

Să considerăm o dreaptă de ecuaţii

$$\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \tag{8}$$

care trece prin punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ şi are parametrii directori ℓ, m, n.

Dacă $x_0, y_0, z_0, \ell, m, n$ sînt funcţii de un parametru u, dreapta (8) determină o suprafaţă riglată.

Notînd cu v valoarea comună a rapoartelor (8), obţinem ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe riglate, anume

$$\begin{cases} x = x_0(u) + v\,\ell(u), \\ y = y_0(u) + v\,m(u), \\ z = z_0(u) + v\,n(u). \end{cases} \tag{9}$$

Deci, dacă în ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe unul din parametrii intră liniar, suprafaţa este riglată.

Cînd amîndoi parametrii intervin liniar în ecuaţiile parametrice, suprafaţa se numeşte dublu riglată.

Ecuaţiile unei astfel de suprafeţe sînt de forma

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 u + v(\ell_0 + \ell_1 u), \\ y = b_0 + b_1 u + v(m_0 + m_1 u), \\ z = c_0 + c_1 u + v(n_0 + n_1 u). \end{cases}$$

Dacă eliminăm parametrii u şi v între aceste ecuaţii, obţinem o ecuaţie de gradul doi în variabilele x, y, z, deci ecuaţia unei cuadrice riglate.

Rezultă că <u>suprafeţele dublu riglate sînt cuadrice riglate</u>.

Pentru $u = u_0$ ($u_0 = \text{const.}$) din (9) obţinem ecuaţiile unei generatoare a suprafeţei riglate.

Prin urmare, curbele coordonate $u = \text{const.}$ sînt generatoarele suprafeţei riglate.

O suprafaţă riglată se numeşte <u>desfăşurabilă</u>, dacă planul tangent la suprafaţă în punctele unei generatoare este acelaşi.

Pentru a determina ecuaţiile unei suprafeţe desfăşurabile, trebuie să punem condiţia ca planul tangent la suprafaţa (9) în punctul $M(u,v)$ să nu depindă de v.

Planul tangent la suprafaţa (9) în punctul $M(u,v)$ are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-x_0(u)-v\ell(u) & y-y_0(u)-vm(u) & z-z_0(u)-vn(u) \\ x_0'(u) + v\ell'(u) & y_0'(u) + vm'(u) & z_0'(u) + vn'(u) \\ \ell(u) & m(u) & n(u) \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x-x_0(u) & y-y_0(u) & z-z_0(u) \\ x_0'(u)+v\ell'(u) & y_0'(u)+vm'(u) & z_0'(u)+vn'(u) \\ \ell(u) & m(u) & n(u) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Un prim caz în care această ecuaţie nu depinde de v este $\ell'(u) = m'(u) = n'(u) = 0$, adică ℓ, m, $n = \text{const.}$ In acest caz, generatoarea suprafeţei este paralelă cu o direcţie fixă şi deci suprafaţa este un cilindru.

Un alt caz în care suprafaţa este desfăşurabilă este acela în care $x_0'(u) = y_0'(u) = z_0'(u) = 0$, adică x_0, y_0, $z_0 = \text{const.}$

Generatoarele suprafeţei trec printr-un punct fix şi suprafaţa este un con.

Dacă

$$x_0'(u)=k\ell'(u), \quad y_0'(u)=km'(u), \quad z_0'(u)=kn'(u), \quad (k=\text{const.}),$$

ecuaţia (10) nu depinde de v şi suprafaţa este desfăşurabilă.

Din aceste relaţii deducem

$$x_0(u)=k\ell(u)+k_1, \quad y_0(u)=km(u)+k_2, \quad z_0(u)=kn(u)+k_3$$

şi ecuaţiile (9) ale suprafeţei se scriu

$$\begin{cases} x = k_1 + (v+k)\,\ell(u), \\ y = k_2 + (v+k)\,m(u), \\ z = k_3 + (v+k)\,n(u), \end{cases}$$

de unde rezultă că generatoarele suprafeţei trec prin punctul fix $A(k_1, k_2, k_3)$ şi ca atare suprafaţa este un con.

Cînd avem $\ell(u)=f(u)x_0'(u)$, $m(u)=f(u)y_0'(u)$, $n(u)=f(u)z_0'(u)$, ecuaţia (10) nu depinde de v şi suprafaţa este desfăşurabilă.

Ecuaţiile (9) se scriu în acest caz[1]

$$\begin{cases} x = x_0(u) + vx_0'(u), \\ y = y_0(u) + vy_0'(u), \\ z = z_0(u) + vz_0'(u). \end{cases} \qquad (11)$$

In sfîrşit, un ultim caz în care ecuaţia (10) nu depinde de v este acela în care

$$\frac{\ell'(u)}{\ell(u)} = \frac{m'(u)}{m(u)} = \frac{n'(u)}{n(u)} = f(u).$$

De aici rezultă

$$\ell(u)=k_1\varphi(u), \quad m(u)=k_2\varphi(u), \quad n(u)=k_3\varphi(u),$$

unde am notat $\varphi(u) = e^{\int f(u)du}$.

---

[1] Am pus v în loc de $f(u)v$, ceea ce nu schimbă suprafaţa căci ℓ, m, n sînt parametri directori.

Cu aceasta, ecuaţiile (9) devin

$$\begin{cases} x = x_0(u) + k_1 v \varphi(u), \\ y = y_0(u) + k_2 v \varphi(u), \\ z = z_0(u) + k_3 v \varphi(u), \end{cases}$$

deci generatoarele suprafeţei sînt paralele cu direcţia fixă de parametri directori k_1, k_2, k_3. Suprafaţa este un cilindru.

Rezultă că <u>suprafeţele desfăşurabile sînt cilindri, conuri sau suprafeţe ale cărei ecuaţii parametrice sînt ecuaţiile (11)</u>.

Curba de ecuaţii parametrice

$$x = x_0(u), \quad y = y_0(u), \quad z = z_0(u) \tag{12}$$

are proprietatea că fiecare punct al ei este un punct singular pentru suprafaţa desfăşurabilă (11).

Intr-adevăr, fie M(u,0) un punct al suprafeţei (11) care se află pe curba (12).

Parametrii directori ai normalei la suprafaţa (11) sînt

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = v \begin{vmatrix} y_0'' & z_0'' \\ y_0' & z_0' \end{vmatrix},$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = v \begin{vmatrix} z_0'' & x_0'' \\ z_0' & x_0' \end{vmatrix},$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = v \begin{vmatrix} x_0'' & y_0'' \\ x_0' & y_0' \end{vmatrix},$$

şi în punctul M avem $A = B = C = 0$, de unde rezultă că punctul M(u,0) este punct singular pentru suprafaţa (11).

Curba (12) se numeşte <u>muchia de întoarcere</u> a suprafeţei desfăşurabile (11) (sau muchia de înapoiere).

Să arătăm că <u>generatoarele suprafeţei desfăşurabile (11) sînt tangente la muchia de întoarcere</u> (12).

Intr-adevăr, generatoarea $u = u_0$ a suprafeţei (11) are ecuaţiile

$$\frac{x-x_0(u_0)}{x_0'(u_0)} = \frac{y-y_0(u)}{y_0'(u_0)} = \frac{z-z_0(u_0)}{z_0'(u_0)}$$

şi deci este tangentă la curba (12) în punctul $P(u_0)$ al ei.

Să considerăm acum suprafaţa riglată (9). Dacă notăm $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vectorul de poziţie al punctului curent al suprafeţei şi $\vec{r}_0(u) = x_0(u)\vec{i} + y_0(u)\vec{j} + z_0(u)\vec{k}$, $\vec{a}(u) = \ell(u)\vec{i} + m(u)\vec{j} + n(u)\vec{k}$, ecuaţia vectorială a suprafeţei riglate este

$$\vec{r} = \vec{r}_0(u) + v\vec{a}(u).$$

Pentru ca această suprafaţă să fie desfăşurabilă, trebuie ca

$$(\vec{r}_0', \vec{a}, \vec{a}') = 0.$$

Într-adevăr, dacă suprafaţa este un con, $\vec{r}_0$ este un vector constant şi deci $\vec{r}_0' = 0$, adică relaţia este verificată.

Dacă suprafaţa este un cilindru, vectorul $\vec{a}$ este constant şi deci $\vec{a}' = 0$, adică relaţia este verificată.

Dacă suprafaţa are ecuaţiile (11), avem $\vec{a} = \vec{r}'$, deci şi în acest caz $(\vec{r}_0', \vec{a}, \vec{a}') = 0$.

Această relaţie se mai poate pune sub forma

$$\vec{a}' = \alpha\vec{r}_0' + \beta\vec{a},$$

adică vectorul $\vec{a}'$ trebuie să se afle în planul vectorilor $\vec{r}_0'$ şi $\vec{a}$.

4. Înfăşurătoarea unei familii de suprafeţe

Să considerăm o familie de suprafeţe depinzînd de un parametru de ecuaţie

$$F(x, y, z, \lambda) = 0. \qquad (13)$$

Dacă există o suprafaţă (Σ) care să fie tangentă în fiecare punct al ei la una din suprafeţele familiei (13), această suprafaţă se numeşte înfăşurătoarea familiei de suprafeţe.

Să presupunem deci că familia (13) admite o înfăşurătoare a cărei ecuaţie este

$$\phi(x,y,z) = 0. \qquad (14)$$

Fie (S_λ) suprafaţa din familie care corespunde valorii λ a parametrului. Notăm cu (Γ_λ) curba de contact a suprafeţei $(\sum)$ cu suprafaţa (S_λ). Cînd λ variază, curba (Γ_λ) descrie suprafaţa $(\sum)$.

Ecuaţiile (13) şi (14) reprezintă deci ecuaţiile curbei (Γ_λ).

Fie $M(x,y,z)$ un punct ordinar al suprafeţelor (S_λ) şi $(\sum)$, care este deci un punct ordinar al curbei (Γ_λ). Putem rezolva sistemul (13) (14) în raport cu două din variabile, de exemplu x şi y şi găsim

$$x = x(z, \lambda) \qquad y = y(z, \lambda). \qquad (15)$$

Cu aceste valori avem

$$F[x(z, \lambda), \; y(z, \lambda), \; z, \lambda] = 0,$$

$$\phi[x(z, \lambda), \; y(z, \lambda), \; z] = 0.$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu λ, obţinem

$$F'_x \cdot x'_\lambda + F'_y \cdot y'_\lambda + F'_\lambda = 0, \qquad (13')$$

$$\phi'_x \cdot x'_\lambda + \phi'_y \cdot y_\lambda = 0. \qquad (14')$$

Dar suprafeţele (S_λ) şi $(\sum)$ sînt tangente în punctul M, deci în acest punct au acelaşi plan tangent, adică

$$\frac{F'_x}{\phi'_x} = \frac{F'_y}{\phi'_y} = \frac{F'_z}{\phi'_z}.$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, din (13') şi (14') deducem

$$F'_\lambda = 0. \qquad (16)$$

Deci, <u>punctele ordinare ale înfăşurătorii</u> $(\sum)$ <u>verifică sistemul (13), (16)</u>.

Să presupunem acum că M este punct singular pentru suprafaţa (S_λ). În acest caz avem

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0$$

şi din relaţia (13') deducem ecuaţia (16), adică:

Locul geometric al punctelor singulare ale suprafeţelor (13) verifică sistemul (13), (16).

Să determinăm acum condiţiile în care familia de suprafeţe (13) admite o înfăşurătoare.

Dacă M este un punct ordinar al curbei (Γ_λ), ale cărei ecuaţii sînt (13), (16), atunci cel puţin unul din determinanţii funcţionali

$$\frac{D(F,F'_\lambda)}{D(y,z)}, \quad \frac{D(F,F'_\lambda)}{D(z,x)}, \quad \frac{D(F,F'_\lambda)}{D(x,y)}$$

este nenul, de exemplu

$$\frac{D(F,F'_\lambda)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{\lambda x} & F''_{\lambda y} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (17)$$

In acest caz rezultă că cel puţin una din derivatele F'_x, F'_y este nenulă, deci punctul M este punct ordinar pentru suprafaţa (S_λ).

De asemenea, cel puţin una din derivatele $F''_{\lambda x}$, $F''_{\lambda y}$ este nenulă, aşa încît M este punct ordinar pentru suprafaţa ($\sum_\lambda$), a cărei ecuaţie este (16).

Rezultă că punctele ordinare ale curbei (Γ_λ) sînt puncte ordinare şi pentru suprafeţele (S_λ) şi ($\sum_\lambda$).

In aceste condiţii putem rezolva sistemul (13), (16), în raport cu x, y, prin formulele

$$x = x(z, \lambda), \qquad y = y(z, \lambda),$$

care reprezintă ecuaţiile parametrice ale curbei (Γ_λ).

Cînd λ variază, curba (Γ_λ) descrie o suprafaţă S ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(z, \lambda), \qquad y = y(z, \lambda), \qquad z = z. \qquad (18)$$

Rezultă că avem

$$\begin{aligned} F[x(z,\lambda), \quad y(z,\lambda), \quad z, \lambda] &= 0, \\ F'_\lambda[x(z,\lambda), \quad y(z,\lambda), \quad z, \lambda] &= 0, \end{aligned} \qquad (19)$$

pe care derivîndu-le în raport cu λ , deducem

$$F'_x \cdot x'_\lambda + F'_y \cdot y'_\lambda = 0,$$

$$F''_{\lambda x} \cdot x'_\lambda + F''_{\lambda y} \cdot y'_\lambda + F''_{\lambda^2} = 0. \qquad (19')$$

Presupunînd că $F''_{\lambda^2} \neq 0$, rezultă că x'_λ şi y'_λ nu pot fi nule amîndouă. De aici deducem că determinanţii funcţionali

$$\begin{vmatrix} y'_z & 1 \\ y'_\lambda & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x'_z \\ 0 & x'_\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x'_z & y'_z \\ x'_\lambda & y'_\lambda \end{vmatrix}$$

nu sînt toţi nuli, deci punctul M este punct ordinar pentru suprafaţa (18).

Dacă derivăm prima ecuaţie (19) în raport cu z, găsim

$$F'_x \, x'_z + F'_y \, y'_z + F'_z = 0,$$

care, împreună cu prima relaţie (19'), ne dă

$$\frac{F'_x}{\begin{vmatrix} y'_z & 1 \\ y' & 0 \end{vmatrix}} = \frac{F'_y}{\begin{vmatrix} 1 & x'_z \\ 0 & x' \end{vmatrix}} = \frac{F'_z}{\begin{vmatrix} x'_z & y'_z \\ x' & y' \end{vmatrix}},$$

de unde concluzia că suprafaţa (18) este tangentă suprafeţei S_λ.

Prin urmare:

<u>Dacă este îndeplinită relaţia (17) şi dacă $F''_{\lambda^2} \neq 0$, familia de suprafeţe (12) admite o înfăşurătoare ale cărei ecuaţii sînt (12) şi (16).</u>

Să demonstrăm acum următoarea teoremă:

<u>Înfăşurătoarea unei familii de plane este o suprafaţă desfăşurabilă.</u>

Să considerăm deci o familie de plane de ecuaţie

$$A(u)x + B(u)y + C(u)z + D(u) = 0, \qquad (20)$$

unde u este un parametru.

Ecuaţia înfăşurătorii se obţine eliminînd pe u între ecuaţia (20) şi ecuaţia

$$A'(u)x + B'(u)y + C'(u)z + D'(u) = 0. \qquad (20')$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile (20) şi (20') în raport cu x şi y şi notînd $z = v$, obţinem

$$x = \alpha(u)v + \beta(u), \quad y = \gamma(u)v + \delta(u), \quad z = v, \qquad (21)$$

unde am pus

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ B' & D' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \quad \gamma = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \quad \delta = -\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

Ecuaţiile (21) sînt ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii familiei de plane.

Se vede că suprafaţa (21) este o suprafaţă riglată.

Ecuaţia planului tangent la suprafaţa (21) este

$$\begin{vmatrix} x-\alpha(u)v-\beta(u) & y-\gamma(u)v-\delta(u) & z-v \\ \alpha'(u)v+\beta'(u) & \gamma'(u)v+\delta'(u) & 0 \\ \alpha(u) & \gamma(u) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x-\beta(u) & y-\delta(u) & z \\ \alpha'(u)v+\beta'(u) & \gamma'(u)v+\delta'(u) & 0 \\ \alpha(u) & \gamma(u) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ţinînd seama de regula de derivare a unui determinant, rezultă

$$\alpha'(u) = \left(\frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \right)' = \frac{B \cdot \Delta_1}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2},$$

unde am pus

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Analog, dacă notăm

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix},$$

obţinem

$$\beta'(u)=\frac{B\cdot\Delta_2}{\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}^2},\qquad \gamma'(u)=\frac{-A\cdot\Delta_1}{\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}^2},\qquad \delta'(u)=\frac{-A\cdot\Delta_2}{\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}^2}.$$

Cu aceste valori, ecuaţia planului tangent devine

$$\begin{vmatrix} x-\beta(u) & y-\delta(u) & z\\ B & -A & 0\\ \alpha(u) & \gamma(u) & 1\end{vmatrix}=0$$

sau

$$A(u)x + B(u)y + C(u)z + D(u) = 0.$$

Deci planul tangent la suprafaţa riglată (21) este acelaşi în lungul unei generatoare, adică suprafaţa este desfăşurabilă.

Să considerăm acum o familie de suprafeţe depinzînd de doi parametri de ecuaţie

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0, \qquad (22)$$

unde λ şi μ sînt parametri variabili.

<u>Spunem că familia (22) admite o înfăşurătoare, dacă există o suprafaţă la care este tangentă fiecare suprafaţă a familiei.</u>

Să presupunem că familia (22) admite ca înfăşurătoare suprafaţa $(\sum)$ de ecuaţie

$$\phi(x,y,z) = 0.$$

Suprafaţa $(\sum)$ este tangentă la o suprafaţă $(S_{\lambda,\mu})$ a familiei (22) în punctul $M(x,y,z)$, care este punct ordinar pentru ambele suprafeţe. Punctul M depinde de suprafaţa $(S_{\lambda,\mu})$, deci coordonatele lui sînt funcţii de λ şi μ, adică

$$x = x(\lambda,\mu),\qquad y = y(\lambda,\mu),\qquad z = z(\lambda,\mu),$$

care sînt tocmai ecuaţiile parametrice ale suprafeţei $(\sum)$.

Rezultă că avem

$$F[x(\lambda,\mu),\ y(\lambda,\mu),\ z(\lambda,\mu),\lambda,\mu]=0,$$
$$\phi[x(\lambda,\mu),\ y(\lambda,\mu),\ z(\lambda,\mu)]=0.$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu λ şi μ, obţinem

$$F'_x\,x'_\lambda + F'_y\cdot y'_\lambda + F'_z\cdot z'_\lambda + F'_\lambda = 0,$$

$$F'_x \cdot x'_\mu + F'_y \cdot y'_\mu + F'_z \cdot z'_\mu + F'_\mu = 0,$$
$$\phi'_x \cdot x'_\lambda + \phi_y \cdot y'_\lambda + \phi'_z \cdot z'_\lambda = 0,$$
$$\phi'_x \cdot x_\mu + \phi'_y \cdot y_\mu + \phi'_z \cdot z_\mu = 0.$$

Ținînd seama că suprafețele $(\sum)$ și $(S_{\lambda,\mu})$ sînt tangente în punctul M, deducem

$$\frac{F'_x}{\phi'_x} = \frac{F'_y}{\phi'_y} = \frac{F'_z}{\phi'_z},$$

și din sistemul de mai sus obținem

$$F'_\lambda = 0, \qquad F'_\mu = 0. \tag{22'}$$

Deci, coordonatele unui punct curent al înfășurătorii familiei (22) verifică sistemul (22), (22').

Să presupunem acum că suprafețele $(S_{\lambda,\mu})$ au puncte singulare.

Intr-un astfel de punct avem $F'_x = F'_y = F'_z$, deci din ecuațiile

$$F'_x x'_\lambda + F'_y y'_\lambda + F'_z z'_\lambda + F'_\lambda = 0,$$
$$F'_x x'_\mu + F'_y y'_\mu + F'_z z'_\mu + F'_\mu = 0$$

rezultă ecuațiile (22'), deci:

Coordonatele punctelor singulare ale suprafețelor (22) verifică ecuațiile (22').

Să vedem acum în ce condiții sistemul (22), (22') definește înfășurătoarea familiei de suprafețe (22).

Să presupunem că suprafața $(S_{\lambda,\mu})$ și suprafețele $(\sum_\lambda)$ și $(\sum_\mu)$ reprezentate de ecuațiile (22') se intersectează într-un punct M(x,y,z), ale cărei coordonate satisfac relațiile

$$\frac{D(F,F'_\lambda,F'_\mu)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ F''_{\lambda x} & F''_{\lambda y} & F''_{\lambda z} \\ F''_{\mu x} & F''_{\mu y} & F''_{\mu z} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{23}$$

$$\frac{D(F'_\lambda, F'_\mu)}{D(\lambda, \mu)} = \begin{vmatrix} F''_{\lambda^2} & F''_{\lambda\mu} \\ F''_{\mu\lambda} & F''_{\mu^2} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (23')$$

Din (23) rezultă că punctul M este punct ordinar pentru suprafeţele $(S_{\lambda,\mu})$, $(\sum_\lambda)$, $(\sum_\mu)$. De asemenea, din această condiţie rezultă că putem rezolva sistemul (22), (22') în raport cu x,y,z, prin formule de forma

$$x = x(\lambda,\mu), \quad y = y(\lambda,\mu), \quad z = z(\lambda,\mu),$$

care reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe $(\sum)$.

Cu aceste expresii avem

$$F[x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu), \lambda, \mu] = 0,$$
$$F'_\lambda[x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu), \lambda, \mu] = 0,$$
$$F'_\mu[x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu), \lambda, \mu] = 0.$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu λ şi μ, obţinem

$$\begin{aligned} &F'_x \cdot x'_\lambda + F'_y \cdot y'_\lambda + F'_z \cdot z'_\lambda = 0, \\ &F''_{\lambda x} \cdot x'_\lambda + F''_{\lambda y} \cdot y'_\lambda + F''_{\lambda z} \cdot z'_\lambda + F''_{\lambda^2} = 0, \\ &F''_{\mu x} \cdot x'_\lambda + F''_{\mu y} \cdot y'_\lambda + F''_{\mu z} \cdot z'_\lambda + F''_{\mu\lambda} = 0, \end{aligned} \qquad (24)$$

respectiv

$$\begin{aligned} &F'_x \cdot x'_\mu + F'_y \cdot y'_\mu + F'_z \cdot z'_\mu = 0, \\ &F''_{\lambda x} \cdot x'_\mu + F''_{\lambda y} \cdot y'_\mu + F''_{\lambda z} \cdot z'_\mu + F''_{\lambda\mu} = 0, \\ &F''_{\mu x} \cdot x'_\mu + F''_{\mu y} \cdot y'_\mu + F''_{\mu z} \cdot z'_\mu + F''_{\mu^2} = 0. \end{aligned} \qquad (24')$$

Ţinînd seama de relaţia (23'), rezultă că nu avem

$$\frac{x'_\lambda}{x'_\mu} = \frac{y'_\lambda}{y'_\mu} = \frac{z'_\lambda}{z'_\mu},$$

deci punctul M este punct ordinar al suprafeţei $(\sum)$.

Prima relaţie (24) şi prima relaţie (24') ne dau

$$\frac{F'_x}{\begin{vmatrix} y_\lambda & z_\lambda \\ y'_\mu & z'_\mu \end{vmatrix}} = \frac{F'_y}{\begin{vmatrix} z_\lambda & x_\lambda \\ x'_\mu & x'_\mu \end{vmatrix}} = \frac{F'_z}{\begin{vmatrix} x_\lambda & y_\lambda \\ x'_\mu & y'_\mu \end{vmatrix}},$$

deci suprafaţa $(S_{\lambda,\mu})$ este tangentă la suprafaţa $(\sum)$.

Aşadar, <u>dacă sînt satisfăcute relaţiile (23) şi (23'), sistemul (22), (22') defineşte înfăşurătoarea familiei de suprafeţe</u> (22).

5. <u>Prima formă fundamentală a unei suprafeţe</u>

Să considerăm o suprafaţă ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = f(u,v), \quad y = \varphi(u,v), \quad z = \psi(u,v) \qquad (25)$$

şi fie (C) o curbă pe această suprafaţă definită de relaţiile

$$u = u(t), \quad v = v(t). \qquad (26)$$

Dacă notăm cu s distanţa dintre două punçte vecine $A(t_1)$, $B(t_2)$, de pe această curbă, avem [cap.II (7')]:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ţinînd seama de expresiile lui x, y, z, obţinem

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,$$

$$dz = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

aşa încît putem scrie pătratul elementului de arc sub forma

$$ds^2 = Edu^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (27)$$

notînd

$$E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia lui ds^2 este deci o formă pătratică în diferenţialele du şi dv.

Această formă pătratică se numeşte <u>prima formă fundamentală</u>, sau <u>forma lui Gauss</u> a suprafeţei sau încă <u>metrica suprafeţei</u>.

Avînd în vedere că pe curba (C), u şi v sînt daţi de ecuaţiile (26), rezultă că

$$du = u'dt, \qquad dv = v'dt$$

şi deci distanţa dintre punctele A, B este

$$s_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$$

Să demonstrăm acum că <u>prima formă fundamentală a suprafeţei este o formă pătratică pozitiv definită</u>.

Intr-adevăr, discriminantul formei pătratice (27) este

$$\Delta = EG - F^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2\right] -$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2$$

sau, ţinînd seama de identitatea lui Lagrange,

$$\Delta = A^2 + B^2 + C^2,$$

unde A, B, C sînt parametrii directori ai normalei la suprafaţa

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \ldots$$

Deci $\Delta > 0$ şi, ţinînd seama că $E > 0$, rezultă că forma pătratică (27) este pozitiv definită.

Ca aplicaţie vom determina distanţa dintre două puncte situate pe una din curbele coordonate.

Pe curba $v = \text{const.}$ avem $dv = 0$, deci

$$ds = \sqrt{E}\, du.$$

De asemenea, pe curba $u = \text{const.}$, avem $du = 0$, adică

$$ds = \sqrt{G}\, dv.$$

Curbele de pe suprafaţa pentru care distanţa dintre două puncte oarecare este nulă se numesc curbe (sau linii) de lungime nulă.

Pentru a obţine aceste curbe, trebuie să rezolvăm ecuaţia:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0.$$

Avînd în vedere că $\Delta > 0$, rezultă că această ecuaţie are rădăcini complexe conjugate.

Notînd

$$\alpha = -\frac{F}{E}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{E},$$

rădăcinile ecuaţiei de mai sus sînt

$$\frac{du}{dv} = \alpha + i\beta, \qquad \frac{du}{dv} = \alpha - i\beta.$$

Deci, liniile de lungime nulă de pe o suprafaţă sînt imaginare.

De asemenea, de aici deducem

$$ds^2 = E\left[(du + \alpha\,dv)^2 + (\beta\,dv)^2\right].$$

Notînd

$$du + \alpha\,dv = d\bar{u}, \qquad \beta\,dv = d\bar{v},$$

rezultă că prima formă fundamentală a suprafeţei se scrie

$$ds^2 = E(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2). \qquad (27')$$

Deci, prima formă fundamentală a oricărei suprafeţe poate fi pusă sub forma (27').

Această formă se numeşte metrica izotermă a suprafeţei.

Dacă metrica suprafeţei este scrisă sub forma izotermă, curbele coordonate $\bar{u} = \text{const.}$ şi $\bar{v} = \text{const.}$ se numesc curbe izoterme.

Presupunînd că suprafaţa este dată prin ecuaţia ei explicită,

$$z = f(x,y).$$

In acest caz, ecuaţiile parametrice ale suprafeţei sînt

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u,v)$$

şi deci, întrebuinţînd notaţia lui Monge,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = p, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = q,$$

metrica suprafeţei se scrie

$$ds^2 = (1+p^2)du^2 + 2pq\, du\, dv + (1+q^2)dv^2.$$

Să considerăm acum suprafaţa (25) a cărei metrică este (27) şi să facem o schimbare de parametri

$$u = u(u_1, v_1), \qquad v = v(u_1, v_1),$$

pentru care

$$\delta = \frac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)} \neq 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei devin

$$x = f_1(u_1,v_1), \qquad y = \varphi_1(u_1,v_1), \qquad z = \psi_1(u_1,v_1), \qquad (25')$$

unde am pus $f_1(u_1,v_1) = f[u(u_1,v_1),\ v(u_1,v_1)]$ etc.

Vom nota metrica suprafeţei scrisă în coordonatele curbilinii u_1, v_1 cu

$$ds_1^2 = E_1\, du_1^2 + 2F_1\, du_1\, dv_1 + G_1\, dv_1^2 .$$

Avem

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_1} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_1}, \ldots,$$

deci

$$E_1 = \sum\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 \sum\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial u_1}\sum\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2\sum\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2,$$

unde suma este extinsă asupra literelor f, φ, ψ.

De aici deducem

$$E_1 = E\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2F\cdot\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial u_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2. \qquad (28)$$

Analog obţinem

$$F_1 = E\,\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial u}{\partial v_1} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) + G\,\frac{\partial v}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_1}, \qquad (28')$$

$$G_1 = E\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + 2F\,\frac{\partial u}{\partial v_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2.$$

Din relaţiile

$$du = \frac{\partial u}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial u}{\partial v_1} dv_1, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v}{\partial v_1} dv_1,$$

deducem

$$du_1 = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial v}{\partial v_1} du - \frac{\partial u}{\partial v_1} dv\right),$$

$$dv_1 = \frac{1}{\delta}\left(-\frac{\partial v}{\partial u_1} du + \frac{\partial u}{\partial u_1} dv\right), \qquad (29)$$

iar din (28), (28') şi (29) rezultă

$$ds_1^2 = ds^2,$$

deci <u>metrica unei suprafeţe este invariantă la o schimbare de parametri pe suprafaţă</u>.

De asemenea, din (28) şi (28') scoatem încă egalitatea

$$E_1G_1 - F_1^2 = \delta^2(EG - F^2), \qquad (30)$$

care ne arată că expresia $EG - F^2$ este un <u>invariant relativ</u> faţă de aceeaşi schimbare a parametrilor.

Să considerăm acum două curbe (C_1) şi (C_2) pe suprafaţa (25), care se intersectează în punctul $M_o(u_o, v_o)$.

<u>Numim unghiul dintre cele două curbe, unghiul dintre tangentele la ele în acest punct</u>.

Dacă notăm cu $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ cosinusurile directoare ale tangentei la curba (C_1) şi cu $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ cosinusurile directoare ale tangentei la curba (C_2) şi cu θ unghiul dintre ele, avem

$$\cos\theta = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds\,\delta s}.$$

Deoarece însă

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv, \qquad \delta x = \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \delta v, \ldots$$

putem scrie

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\delta uv + G\,\delta v^2}}, \qquad (31)$$

E, F şi G fiind coeficienţii metricei suprafeţei (23), calculaţi în punctul M_o.

De aici rezultă că condiţia ca două curbe de pe suprafaţa (25) să fie ortogonale este

$$Edu\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + Gfv\,\delta v = 0. \qquad (31')$$

Dacă curba (C_1) este curba coordonată $u=const.$, iar curba (C_2) curba coordonată $v=const.$, avem $du=0$, $\delta v=0$ şi, notînd cu ω unghiul dintre curbele coordonate pe suprafaţă, din (31) deducem

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad (32)$$

deci condiţia ca curbele coordonate pe suprafaţă să fie ortogonale este $F=0$.

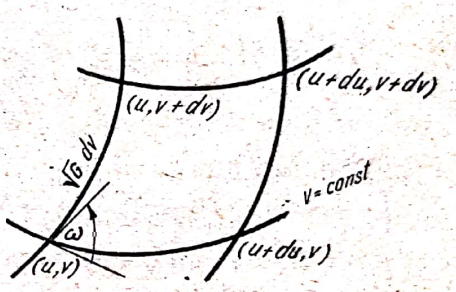


Fig.21

Urmează că: <u>curbele izoterme pe suprafaţă constituie un sistem ortogonal</u>.

Din formula (32) scoatem uşor formula

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}. \qquad (32')$$

Să determinăm acum <u>aria unei porţiuni simple a suprafeţei</u> (25), care corespunde domeniului D din planul variabilelor u, v.

Pentru aceasta împărţim porţiunea respectivă în paralelograme curbilinii prin curbele coordonate ale suprafeţei. Fie un astfel de paralelogram ale cărui vîrfuri sînt $M_o(u_o,v_o)$, $M_1(u_o,v_1)$, $M_2(u_1,v_o)$, $M_3(u_1,v_1)$.

Să considerăm acum tangentele la curbele $u=u_o$ şi $v=v_o$ în punctul M_o.

Ecuaţiile parametrice ale tangentei la curba $u=u_o$ sînt

$$x=f(u_o,v_o)+\rho_1 f'_v(u_o,v_o), \qquad y=\varphi(u_o,v_o)+\rho_1\varphi'_v(u_o,v_o),$$

$$z=\psi(u_o,v_o)+\rho_1\psi'_v(u_o,v_o),$$

unde ρ_1 este un parametru.

Pentru $\rho_1 = |v_1 - v_0|$ obţinem un punct M_1' situat pe tangenta la curba $u=u_0$ în punctul M_0.

Ecuaţiile parametrice ale tangentei la curba $v=v_0$ sînt

$$x = f(u_0,v_0) + \rho_2 f_u'(u_0,v_0),$$

$$y = \varphi(u_0,v_0) + \rho_2 \varphi_u'(u_0,v_0),$$

$$z = \psi(u_0,v_0) + \rho_2 \psi_u'(u_0,v_0),$$

ρ_2 fiind un parametru.

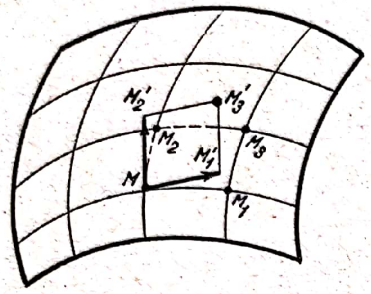


Fig.22

Pentru $\rho_2 = |u_1 - u_0|$ obţinem pe această tangentă un punct M_2'.

Fie M_3' punctul care împreună cu M_0, M_1', M_2' formează, în planul tangent la suprafaţă în M_0, un paralelogram.

Vom arăta că suma Σ a ariilor $M_0M_1'M_2'M_3'$, corespunzătoare tuturor paralelogramelor curbilinii în care am împărţit porţiunea de suprafaţă, are o limită bine determinată, cînd $|u_1 - u_0| \to 0$ şi $|v_1 - v_0| \to 0$, limită pe care o vom numi aria porţiunii de suprafaţă.

Avem

$$\overline{M_0M_1'}^2 = (v_1 - v_0)^2 (f_{v_0}'^2 + \varphi_{v_0}'^2 + \psi_{v_0}'^2) = G(v_1 - v_0)^2,$$

unde G este coeficientul metricei suprafeţei, calculat în punctul $M_0(u_0,v_0)$.

Deci

$$\overline{M_0M_1'} = |v_1 - v_0| \sqrt{G}.$$

Analog găsim

$$\overline{M_0M_2'} = |u_1 - u_0| \sqrt{E}.$$

Ţinînd seama de formula (32'), rezultă

$$\text{aria } M_0M_1'M_2'M_3' = \overline{M_0M_1'} \cdot \overline{M_0M_2'} \sin\omega = \sqrt{EG - F^2}\,|u_1 - u_0| \cdot |v_1 - v_0|.$$

Deci, însumînd toate ariile asemănătoare, avem la limită

$$\lim_{\substack{u_1 \to u_0 \\ v_1 \to v_0}} \Sigma \text{ aria } M_0M_1'M_2'M_3' = \lim_{\substack{u_1 \to u_0 \\ v_1 \to v_0}} \Sigma \sqrt{EG - F^2}\,|u_1 - u_0| \cdot |v_1 - v_0| \cdot$$

Dar funcţia $\sqrt{EG-F^2}$ este continuă, deci membrul doi al acestei egalităţi este tocmai integrala dublă a acestei funcţii.

Rezultă că aria porţiunii de suprafaţă considerată este

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Ca aplicaţie să considerăm suprafaţa a cărei metrică este

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

şi să determinăm lungimile laturilor şi unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele $u = \pm \frac{av^2}{2}$, $v = 1$.

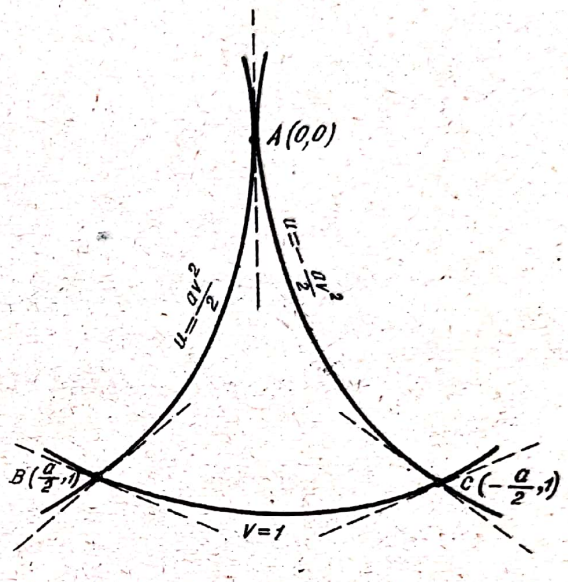


Fig.23

Dacă notăm cu A, B, C vîrfurile acestui triunghi, avem

$$A(0,0), \quad B\left(\frac{a}{2}, 1\right), \quad C\left(-\frac{a}{2}, 1\right).$$

Curba AB are ecuaţia $u = \frac{av^2}{2}$ şi deci pe această curbă avem $du = avdv$, de unde deducem

$$ds^2 = \frac{a^2}{4}(v^2+2)^2 dv^2,$$

adică

$$ds = \frac{a}{2}(v^2 + 2)\, dv$$

şi deci

$$s_{AB} = \frac{a}{2}\int_0^1 (v^2+2)\, dv = \frac{7a}{6}.$$

Analog găsim

$$s_{AC} = \frac{7a}{6}, \qquad s_{BC} = a.$$

Unghiul A este determinat de curbele $u = \frac{av^2}{2}$ şi $n = -\frac{av^2}{2}$.

Pe aceste curbe avem

$$du = av\, dv, \qquad \delta u = -av\, \delta v,$$

deci

$$\cos A = \frac{u^2 + a^2 (1-v^2)}{u^2 + a^2 (1+v^2)} \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 1,$$

adică $A=0$ şi deci curbele $u = \frac{av^2}{2}$, $u = -\frac{av^2}{2}$ sînt tangente în A.

Analog găsim

$$\cos B = \frac{2}{3}, \qquad \cos C = -\frac{2}{3}.$$

6. Metrica suprafeţelor de rotaţie şi riglate

Să considerăm o suprafaţă de rotaţie de ecuaţii parametrice

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = f(u).$$

De aici deducem

$$x'_u = \cos v, \qquad y'_u = \sin v, \qquad z'_u = f'(u),$$

$$x'_v = -u \sin v, \qquad y'_v = u \cos v, \qquad z'_v = 0,$$

adică

$$E = 1 + f'^2(u), \qquad F = 0, \qquad G = u^2$$

şi deci metrica suprafeţei se scrie

$$ds^2 = \left[1 + f'^2(u)\right] du^2 + u^2 dv^2.$$

Dacă notăm

$$dU = \sqrt{1 + f'^2(u)}\, du,$$

obţinem

$$U = \int \sqrt{1+f'^2(u)}\, du.$$

Deci, prin schimbarea de parametrii

$$U = \int \sqrt{1 + f'^2(u)}\, du, \qquad V = v,$$

metrica suprafeţei devine

$$ds^2 = dU^2 + \varphi^2(U)\, dV^2.$$

Să considerăm acum suprafaţa riglată generată de dreapta

$$\frac{x-a(u)}{\ell(u)} = \frac{y-b(u)}{m(u)} = \frac{z-c(u)}{n(u)} . \qquad (33)$$

Putem presupune că ℓ , m, n sînt cosinusurile directoare ale acestei drepte, deci că avem

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1. \qquad (34)$$

Curba de ecuaţii parametrice

$$x = a(u), \quad y = b(u), \quad z = c(u)$$

se numeşte curba directoare a suprafeţei riglate.

Vom presupune că parametrul u este arcul pe această curbă, adică

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1. \qquad (34')$$

In sfîrşit vom presupune că tangenta la directoare este perpendiculară pe generatoarea (33) a suprafeţei, adică

$$a'\ell + b'm + c'n = 0. \qquad (34'')$$

De asemenea, derivînd relaţia (34) în raport cu u, obţinem

$$\ell\ell' + mm' + nn' = 0. \qquad (34''')$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei riglate sînt

$$x=a(u)+v\ell(u), \quad y=b(u)+vm(u), \quad z=c(u)+vn(u).$$

Calculînd derivatele parţiale ale funcţiilor x, y, z şi ţinînd seama de relaţiile (34),(34'), (34''), (34'''), obţinem

$$E = M^2v^2 + 2Nv + 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

unde am pus

$$M^2 = \ell'^2 + m'^2 + n'^2, \quad N = a'\ell' + b'm' + c'n'.$$

Deci, metrica suprafeţei este

$$ds^2 = \left[M^2(u)v^2 + 2\,N(u)\,v+1\right] du^2 + dv^2.$$

Să considerăm acum o suprafaţă desfăşurabilă ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$\begin{cases} x = x_0(u) + v\,x_0'(u), \\ y = y_0(u) + v\,y_0'(u), \\ z = z_0(u) + v\,z_0'(u). \end{cases}$$

Vom presupune că parametrul u este arcul pe muchia de întoarcere a suprafeţei, adică

$$x_o'^2(u) + y_o'^2(u) + z_o'^2(u) = 1. \qquad (35)$$

Avem

$$x_u' = x_o' + v x_o'', \qquad y_u' = y_o' + v y_o'', \qquad z_u' = z_o' + v z_o'',$$

$$x_v' = x_o', \qquad y_v' = y_o', \qquad z_v' = z_o'.$$

Ţinînd seama de relaţia (35) şi de relaţia obţinută prin derivarea acesteia în raport cu u,

$$z_o' z_o'' + y_o' y_o'' + z_o' z_o'' = 0,$$

deducem

$$E = 1 + v^2(x_o''^2 + y_o''^2 + z_o''^2), \qquad F = 1, \qquad G = 1.$$

Avînd în vedere că parametrul u este arcul pe muchia de întoarcere, rezultă că

$$x_o''^2 + y_o''^2 + z_o''^2 = \frac{1}{R^2},$$

R fiind raza de curbură a muchiei de întoarcere, deci metrica suprafeţei este

$$ds^2 = \left(1 + \frac{v^2}{R^2}\right) du^2 + 2du\,dv + dv^2,$$

unde $R = R(u)$ sau

$$ds^2 = (du + dv)^2 + \frac{v^2}{R^2} du^2.$$

Punînd

$$u + v = U, \qquad u = V,$$

deducem

$$u = V, \qquad v = U - V$$

şi metrica se scrie

$$ds^2 = dU^2 + \frac{(U - V)^2}{R^2(V)} d V^2.$$

7. Reprezentarea conformă

Fie (S) şi (S_1) două suprafeţe ale căror metrici sînt

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)du\,dv + G(u,v)dv^2,$$

$$ds_1^2 = E_1(u_1,v_1)du_1^2 + 2F_1(u_1,v_1)du_1dv_1 + G_1(u_1,v_1)dv_1^2. \qquad (36)$$

Vom spune că transformarea

$$u_1 = u_1(u,v), \qquad v_1 = v_1(u,v) \qquad (37)$$

reprezintă conform suprafaţa (S) pe suprafaţa (S_1), dacă unghiul dintre două curbe situate pe suprafaţa (S) este egal cu unghiul curbelor corespunzătoare de pe suprafaţă (S_1), prin transformarea (37).

Să determinăm condiţiile pe care trebuie să le satisfacă metricile celor două suprafeţe, pentru ca acestea să se reprezinte conform una pe cealaltă.

Din ecuaţiile (37) rezultă

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u}du + \frac{\partial u_1}{\partial v}dv, \qquad dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u}du + \frac{\partial v_1}{\partial v}dv.$$

Cu aceste valori, metrica ds_1^2 devine

$$ds_1^2 = E_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}du + \frac{\partial u_1}{\partial v}dv\right)^2 +$$

$$+ 2F_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}du + \frac{\partial u_1}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}du + \frac{\partial v_1}{\partial v}dv\right) +$$

$$+ G_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}du + \frac{\partial v_1}{\partial v}dv\right)^2,$$

sau

$$ds_1^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2, \qquad (36')$$

unde am pus

$$\bar{E} = E_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2F_1(u_1,v_1)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + G_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$\bar{F} = E_1(u_1,v_1)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + G_1(u_1,v_1)\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$\bar{G} = E_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2F_1(u_1,v_1)\frac{\partial u_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial v} + G_1(u_1,v_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2.$$

Dacă notăm cu ω şi ω_1 unghiul dintre curbele de coordonate pe suprafaţa (S), respectiv pe suprafaţa (S_1), avem

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \cos\omega_1 = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}.$$

Dar $\omega_1 = \pm\omega$ (unghiurile pot avea orientări diferite); de aici rezultă

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}. \qquad (38)$$

Să notăm cu θ unghiul dintre o curbă (C) de pe suprafaţa (S) şi curba v=const. de pe această suprafaţă şi cu θ_1 unghiul dintre curba (C_1) corespondentă pe suprafaţa (S_1)lui (C) şi curba v=const. de pe suprafaţa (S_1).

In baza formulei (31), rezultă

$$\cos\theta = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\,ds},$$

de unde rezultă

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{\Delta}{E}}\cdot\frac{dv}{ds}.$$

Analog avem

$$\sin\theta_1 = \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}}}\cdot\frac{dv}{ds_1}.$$

Dar $\theta = \pm\theta_1$,

deci

$$\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}}}\cdot\frac{1}{ds_1} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{E}}\cdot\frac{1}{ds},$$

adică

$$\frac{\bar{\Delta}}{\bar{E}}\cdot\frac{1}{ds_1^2} = \frac{\Delta}{E}\cdot\frac{1}{ds^2}. \qquad (39)$$

Dacă notăm cu φ, respectiv φ_1, unghiurile dintre curbele (C) şi u=const., respectiv (C_1) şi u=const., obţinem la fel

$$\frac{\bar{\Delta}}{G}\cdot\frac{1}{ds_1^2} = \frac{\Delta}{E}\cdot\frac{1}{ds^2}. \qquad (39')$$

Din (39) şi (39') rezultă

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{\bar{G}}{G},$$

care, împreună cu relaţia (38), ne dă

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{\bar{F}}{F} = \frac{\bar{G}}{G} . \qquad (40)$$

Condiţiile (40) sînt deci condiţii necesare ca suprafeţele (S) şi (S_1) să se reprezinte conform una pe alta.

Să arătăm că ele sînt şi suficiente.

Intr-adevăr, însemnînd cu $\lambda^2(u,v)$ valoarea comună a rapoartelor (40), avem

$$\bar{E} = \lambda^2 E, \quad \bar{F} = \lambda^2 F, \quad \bar{G} = \lambda^2 G. \qquad (40')$$

Fie θ unghiul dintre două curbe de pe suprafaţa (S) şi θ_1 unghiul dintre curbele corespondente de pe suprafaţa (S_1). Avem atunci

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s},$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\bar{E}\,du\,\delta u + \bar{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \bar{G}\,dv\,\delta v}{ds_1\,\delta s_1} .$$

Dar, în baza relaţiilor (40'), deducem

$$\cos\theta_1 = \cos\theta,$$

adică $\theta_1 = \pm\theta$ şi suprafaţa (S) se reprezintă conform pe suprafaţa (S_1).

Deci, condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă (S) să se reprezinte conform pe o suprafaţă (S_1) este ca metricele celor două suprafeţe să aibă, respectiv, formele

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$ds_1^2 = \lambda^2(u,v)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

Să considerăm acum planul xOy, a cărui ecuaţie este z=0 şi a cărui metrică se scrie

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

In paragraful 5, formula (27'), am arătat că metrica oricărei suprafeţe poate fi pusă sub forma

$$ds_1^2 = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2).$$

De aici şi din teorema precedentă rezultă:
Orice suprafaţă se poate reprezenta conform pe un plan.

8. A doua formă fundamentală a suprafeţei

Să considerăm o suprafaţă ale cărei ecuaţii parametrice sînt:

$$x = f(u,v), \qquad y = \varphi(u,v), \qquad z = \psi(u,v) \tag{41}$$

şi fie $M(u,v)$ un punct pe ea.

Normala la suprafaţă în punctul M are cosinusurile directoare

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Tangenta în M la o curbă oarecare (C) de pe suprafaţa care trece prin punctul M are parametrii directori dx, dy, dz, diferenţialele fiind calculate de-a lungul curbei. Ţinînd seama că normala la suprafaţă este perpendiculară pe tangenta la curba (C), rezultă că

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0. \tag{42}$$

Diferenţiind această relaţie de-a lungul curbei (C), obţinem

$$\lambda\,d^2x + \mu\,d^2y + \nu\,d^2z + d\lambda\,dx + d\mu\,dy + d\nu\,dz = 0. \tag{43}$$

Avînd în vedere că λ, μ, ν, x, y, z sînt funcţii de u şi v, rezultă că suma $d\lambda\,dx + d\mu\,dy + d\nu\,dz$ este o formă pătratică în diferenţialele du, dv, deci putem scrie

$$\lambda\,d^2x + \mu\,d^2y + \nu\,d^2z = D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''\,dv^2. \tag{43'}$$

Se poate deci ataşa unei suprafeţe forma pătratică

$$\Phi_2 = D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''\,dv^2, \tag{44}$$

care se numeşte <u>a doua formă pătratică fundamentală</u> a suprafeţei.

Să determinăm expresiile coeficienţilor D, D', D'' ai celei de-a doua forme fundamentale.

Pentru aceasta să considerăm expresia

$$dx = f'_u\,du + f'_v\,dv$$

pe care o diferenţiem. Obţinem

$$d^2x = f''_{uu}\,du^2 + 2f''_{uv}\,du\,dv + f''_{vv}\,dv^2$$

şi relaţii analoge pentru d^2y şi d^2z.

Inlocuind aceste expresii în relaţia (43') şi ţinînd seama de expresiile lui λ, μ, ν, obţinem

$$D = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \\ f''_{uu} & \varphi''_{uu} & \psi''_{uu} \end{vmatrix}, \qquad D' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \\ f''_{uv} & \varphi''_{uv} & \psi''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \\ f''_{vv} & \varphi''_{vv} & \psi''_{vv} \end{vmatrix}.$$

Din formulele (42), (43') rezultă că parametrii direc - tori ai tangentei la curbele de pe suprafaţă, pentru care a doua formă fundamentală este nulă, satisfac relaţiile

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0,$$

$$\lambda\,d^2x + \mu\,d^2y + \nu\,d^2z = 0.$$

De aici rezultă că λ, μ, ν sînt proporţionali cu minorii matricei

$$\begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{Vmatrix},$$

care sînt tocmai coeficienţii planului osculator la curbă.

Deci, planul tangent la suprafaţă coincide cu planul osculator la curbă.

<u>Curbele de pe suprafaţă, pentru care planul osculator este tangent la suprafaţă, se numesc linii asimptotice ale suprafeţei.</u>

Rezultă că <u>ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice ale unei suprafeţe este</u>

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \qquad (45)$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu $\frac{du}{dv}$ (de exemplu), obţinem relaţiile

$$du=\frac{-D'+\sqrt{D'^2-DD''}}{2D}dv, \qquad du=\frac{-D'-\sqrt{D'^2-DD''}}{D}dv,$$

adică două ecuaţii diferenţiale, cu soluţiile de forma

$$f_1(u,v)=c_1, \qquad f_2(u,v)=c_2, \qquad (c_1,c_2=\text{const.}).$$

Deci, pe o suprafaţă sînt, în general, două familii de linii asimptotice.

Punînd condiţia ca liniile asimptotice să treacă prin punctul $M_0(u_0,v_0)$, obţinem

$$c_1=f_1(u_0,v_0), \qquad c_2=f_2(u_0,v_0).$$

Rezultă că printr-un punct de pe suprafaţă trec, în general, două linii asimptotice.

Dacă în punctul M_0 de pe suprafaţă avem $D'^2-DD''>0$, cele două linii asimptotice care trec prin punct sînt reale şi distincte şi punctul M_0 se numeşte <u>hiperbolic</u>.

Dacă în M_0 avem $D'^2-DD''=0$, cele două linii asimptotice sînt confundate şi punctul se numeşte <u>parabolic</u>.

Cînd avem $D'^2-DD''<0$, cele două linii asimptotice care trec prin punctul M_0 sînt imaginare şi punctul se numeşte <u>eliptic</u>.

Să determinăm acum expresia celei de-a doua forme fundamentale a unei suprafeţe cînd aceasta este dată prin ecuaţia explicită

$$z=f(x,y).$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei sînt

$$x=u, \qquad y=v, \qquad z=f(u,v).$$

Calculînd derivatele parţiale ale lui x, y, z şi întrebuinţînd notaţia lui Monge

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \qquad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sînt

$$D=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad D'=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad D''=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

deci, a doua formă fundamentală a suprafeţei este

$$\phi_2 = \frac{r dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2}{\sqrt{1 + p^2+q^2}}$$

sau

$$\phi_2 = \frac{d^2 z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} .$$

Ecuaţia liniilor asimptotice ale suprafeţei este

$$d^2 z = 0.$$

In paragraful 5 am demonstrat invarianţa primei forme fundamentale a unei suprafeţe la o schimbare de parametri. Să demonstrăm acum o proprietate analogă pentru a doua formă fundamentală.

Făcînd schimbarea de parametri

$$u = u(u_1, v_1), \qquad v = v(u_1, v_1),$$

al cărui determinant este

$$\delta = \frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)} \neq 0,$$

ecuaţiile parametrice ale suprafeţei devin

$$x = f_1(u_1, v_1), \qquad y = \varphi_1(u_1, v_1), \qquad z = \psi_1(u_1, v_1), \tag{46}$$

unde am pus

$$f_1(u_1, v_1) = f\left[u(u_1, v_1), \quad v(u_1, v_1)\right], \ldots$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, rezultă

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u_1} , \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial u_1^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2$$

şi relaţii analoge pentru celelalte derivate ale funcţiei f_1 şi pentru funcţiile φ_1, ψ_1.

Avem

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_1^2} \end{vmatrix},$$

unde Δ_1 este discriminantul primei forme fundamentale a suprafeţei ale cărei ecuaţii parametrice sînt (46).

Dar $\Delta_1 = \delta^2 \Delta$ şi ţinînd seama de relaţiile (47), deducem

$$\begin{cases} D = \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 D + 2 \frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial u_1} D' + \left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2 D'', \\ D_1' = \frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} D + \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial u_1}\right) D' + \frac{\partial v}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1} D'', \\ D_1'' = \left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2 D + 2 \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} D' + \left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2 D''. \end{cases} \quad (48)$$

Din relaţiile

$$du = \frac{\partial u}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial u}{\partial v_1} dv_1, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v}{\partial v_1} dv_1,$$

obţinem

$$du_1 = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial v}{\partial v_1} du - \frac{\partial u}{\partial v_1} dv\right), \qquad dv_1 = \frac{1}{\delta}\left(-\frac{\partial v}{\partial u_1} du + \frac{\partial u}{\partial u_1} dv\right).$$

Rezultă că

$$D_1 du_1^2 + 2D_1' du_1 dv_1 + D_1'' dv_1^2 = D\, du^2 + 2\, D' du\, dv + D'' dv^2,$$

deci, <u>a doua formă fundamentală a unei suprafeţe este invariantă la o schimbare de parametri pe suprafaţă.</u>

De asemenea rezultă formula

$$D_1'^2 - D_1 D_1'' = \delta^2 (D'^2 - DD''),$$

deci, natura punctelor unei suprafeţe (hiperbolice, parabolice, eliptice) este invariantă la o schimbare de parametri pe suprafaţă.

Să determinăm acum <u>liniile asimptotice ale unei suprafeţe riglate</u>.

Fie o suprafaţă riglată ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$\begin{cases} x = x_0(u) + v\,\ell(u), \\ y = y_0(u) + v\,m(u), \\ z = z_0(u) + v\,n(u). \end{cases}$$

Calculînd derivatele parţiale ale acestor funcţii, obţinem expresia coeficienţilor celei de-a doua forme fundamentale

$$D = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_0'+v\ell' & y_0'+vm' & z_0'+vn' \\ \ell & m & n \\ x_0''+v\ell'' & y_0''+vm'' & z_0''+vn'' \end{vmatrix},$$

$$D' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix}, \qquad D'' = 0.$$

Ecuaţia liniilor asimptotice ale suprafeţei se scrie

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv = 0$$

şi o soluţie evidentă a ei este $du = 0$, adică $u=\text{const}$.

Dar curbele $u=\text{const}$. sînt generatoarele suprafeţei; deci:

<u>Generatoarele unei suprafeţe riglate formează una din familiile de linii asimptotice ale suprafeţei</u>.

Dacă suprafaţa este dublu riglată, ea are două familii de generatoare, deci toate liniile asimptotice ale suprafeţei sînt generatoarele ei.

Rezultă că <u>cuadricele riglate au ca linii asimptotice generatoarele rectilinii ale lor</u>.

Dacă considerăm acum o suprafaţă desfăşurabilă ale cărei ecuaţii sînt

$$\begin{cases} x = x_0(u) + vx_0'(u), \\ y = y_0(u) + vy_0'(u), \\ z = z_0(u) + vz_0'(u), \end{cases}$$

avem

$$D = -\frac{v^2}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ x_0''' & y_0''' & z_0''' \end{vmatrix}, \qquad D' = D'' = 0,$$

deci

$$D'^2 - DD'' = 0.$$

Urmează că <u>toate punctele unei suprafeţe desfăşurabile sînt puncte parabolice</u>.

Să demonstrăm reciproca acestei proprietăţi.

Fie suprafaţa de ecuaţie explicită

$$z = f(x,y).$$

Ecuaţia liniilor asimptotice este

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \qquad (49)$$

Punctele suprafeţei fiind parabolice, liniile asimptotice sînt confundate.

Vom presupune că am făcut o schimbare de parametri pe suprafaţă alegînd curbele $x = \text{const.}$ ca linii asimptotice ale suprafeţei. Deci ecuaţia (49) este verificată de soluţia $x = \text{const.}$ Rezultă

$$t = 0. \qquad (50)$$

Din relaţia $s^2 - rt = 0$, care ne spune că punctele suprafeţei sînt parabolice, rezultă

$$s = 0. \qquad (50')$$

Relaţiile (50) şi (50') se scriu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

De aici deducem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = k, \qquad (k=\text{const.}),$$

de unde

$$f(x,y) = ky + \varphi(x).$$

Ecuaţia suprafeţei este deci de forma

$$z = \varphi(x) + ky.$$

Ecuaţiile parametrice ale ei se scriu

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \varphi(u) + kv$$

şi suprafaţa este riglată, avînd ca generatoare curbele $u = \text{const}$.

Planul tangent la suprafaţă în punctul $M(u,v)$ are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-u & y & z-\varphi(u) \\ 1 & 0 & \varphi'(u) \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0,$$

deci este acelaşi de-a lungul unei generatoare şi suprafaţa este desfăşurabilă.

Rezultă teorema:

<u>Condiţia necesară şi suficientă ca suprafaţa</u>

$$z = f(x,y)$$

<u>să fie desfăşurabilă este</u>

$$s^2 - rt = 0.$$

Să găsim acum suprafeţele care au liniile asimptotice nedeterminate, deci a doua formă fundamentală identic nulă.

Fie deci suprafaţa de ecuaţie

$$z = f(x,y).$$

Din condiţia $\Phi_2 = 0$ rezultă

$$r = s = t = 0.$$

Aceste relaţii se mai scriu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = k_2, \qquad (k_1, k_2 = \text{const}.),$$

de unde deducem

$$f(x,y) = k_1x + k_2y + k_3$$

şi suprafaţa este un plan de ecuaţie

$$z = k_1x + k_2y + k_3.$$

Deci <u>singurele suprafeţe care au liniile asimptotice nedeterminate sînt planele</u>.

Ca aplicaţie să determinăm liniile asimptotice ale suprafeţei

$$z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

Avem

$$r = -\frac{2y}{x^3}, \qquad s = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}, \qquad t = \frac{2x}{y^3},$$

deci ecuaţia liniilor asimptotice este

$$\frac{2y}{x^3}\,dx^2 + 2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx\,dy + \frac{2x}{y^3}\,dy^2 = 0$$

sau

$$y^4\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - xy(y^2 - x^2)\,\frac{dx}{dy} - x^4 = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie, găsim

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{x^3}{y^3}.$$

Prima ecuaţie se poate scrie

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

de unde prin integrare rezultă

$$\ln x = \ln y + \ln c_1, \qquad (c_1 = \text{const.}),$$

adică

$$\frac{x}{y} = c_1.$$

Analog din a doua ecuaţie rezultă

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = c_2.$$

Deci cele două familii de asimptotice au ecuaţiile

$$\begin{cases} z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \\ \frac{x}{y} = c_1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = c_2 . \end{cases}$$

9. Curbura curbelor de pe suprafaţă

Să considerăm acum pe suprafaţă o curbă (C) căreia i se ataşează în fiecare punct al ei a doua formă pătratică fundamentală

$$\phi_2 = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 .$$

Dacă notăm cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ cosinusurile directoare ale normalei principale la curba (C), în baza primei formule a lui Frenet avem

$$\frac{\alpha_1}{R} = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{\beta_1}{R} = \frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \frac{\gamma_1}{R} = \frac{d^2z}{ds^2},$$

unde R este raza de curbură a curbei (C) în punctul considerat.

Cu aceste valori, formula (43') devine

$$\frac{\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''\,dv^2}{ds^2},$$

sau, notînd cu θ unghiul dintre normala principală la curba (C) şi normala la suprafaţă şi, ţinînd seama de expresia lui ds^2,

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} . \qquad (51)$$

Dacă punem $\frac{du}{dv} = m$, această relaţie se poate scrie

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{Dm^2 + 2D'm + D''}{Em^2 + 2Fm + G} . \qquad (51')$$

Membrul doi din (51') depinde de punctul M(u,v) de pe suprafaţă şi de raportul $\frac{du}{dv}$, adică de tangenta la curba (C) în acest punct.

Să considerăm acum o altă curbă (C_1) tangentă la (C) în punctul $M(u,v)$. Dacă notăm cu θ_1 unghiul dintre normala principală la curba (C_1) şi normala la suprafaţă în M şi cu R_1 raza de curbură a curbei în acest punct, avem

$$\frac{\cos\theta}{R_1} = \frac{Dm^2 + 2D'm + D''}{Em^2 + 2Fm + G},$$

deci

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R}. \qquad (52)$$

Să presupunem că în punctul M curbele (C) şi (C_1) au acelaşi plan osculator care diferă de planul tangent la suprafaţă [căci dacă n-ar diferi am avea $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ şi ambii membrii ai formulei (52) ar fi nuli]. In acest caz, $\theta = \theta_1$ şi din (52) rezultă

$$R = R_1.$$

Avem această situaţie dacă luăm drept curbă (C_1) secţiunea plană a suprafeţei cu planul osculator la curba (C) în punctul M.

<u>Putem reduce deci studiul curburii curbelor trasate pe o suprafaţă la studiul curburii curbelor plane ale suprafeţei</u>.

Să considerăm acum o curbă (C) pe suprafaţă şi fie M un punct al ei. Numim <u>secţiunea normală</u> tangentă în M la curbă curba plană (C_n), obţinută prin secţionarea suprafeţei cu planul determinat de normala la suprafaţă în M şi tangenta la curba (C) în acest punct.

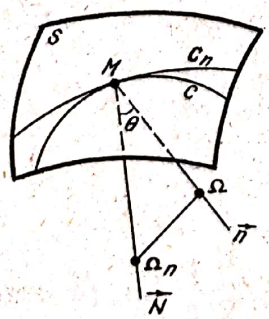


Fig.24

Notînd cu R_n raza de curbură a secţiunii normale (C_n) şi presupunînd că sensul pozitiv al normalei la suprafaţă în M este acelaşi cu sensul pozitiv al normalei la secţiunea normală (C_n), avem $\theta_1 = 0$ şi formula (52) devine

$$R = R_n \cos\theta.$$

Dacă notăm cu Ω centrul de curbură al curbei (C) în punctul M şi cu Ω_n

centrul de curbură al secţiunii normale (C_n) în acelaşi punct, avem

$$R = \overline{M\Omega} \ , \qquad R_n = \overline{M\Omega}_n$$

şi deci

$$\overline{M\Omega} = \overline{M\Omega}_n \cos \theta .$$

De aici rezultă că triunghiul $M\Omega\Omega_n$ este dreptunghic în Ω, deci dreapta $\Omega\Omega_n$ este perpendiculară pe dreapta $M\Omega$, adică pe normala principală la curba (C).

Pe de altă parte, dreapta $\Omega\Omega_n$ este situată în planul normal la curba (C), deci este perpendiculară pe tangenta la curba (C) în punctul M.

Rezultă că dreapta $\Omega\Omega_n$ este perpendiculară pe planul osculator la curba (C) în punctul M, adică Ω este proiecţia punctului Ω_n pe planul osculator la curba (C) în M.

Avem deci:

<u>T e o r e m a l u i M e u s n i e r.</u> <u>Centrul de curbură într-un punct M al unei curbe (C) de pe o suprafaţă este proiecţia ortogonală a centrului de curbură a secţiunii normale tangente în M la curbă, pe planul osculator al curbei (C).</u>

Dacă notăm $R_n = \rho$, formula (51) devine

$$\frac{1}{\rho} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} . \qquad (53)$$

Numim cantitatea $\frac{1}{\rho}$ <u>curbura normală</u> a curbei (C) în punctul M.

Fiind dat un punct pe suprafaţă, prin acest punct trec o infinitate de curbe situate pe suprafaţă. Fiecărei astfel de curbe i se ataşează o curbură normală, deci unui punct de pe suprafaţă i se ataşează o infinitate de curburi normale. Să arătăm că mulţimea acestor numere este mărginită superior şi inferior.

Intr-adevăr, dacă punem ca mai sus, $m = \frac{du}{dv}$, din (53) deducem

$$(E\tfrac{1}{\rho} - D)m^2 + 2(F\tfrac{1}{\rho} - D')m + G\tfrac{1}{\rho} - D'' = 0 .$$

Această ecuaţie de gradul doi în m are rădăcini reale, adică

$$(F\frac{1}{\rho} - D')^2 - (E\frac{1}{\rho} - D)(G\frac{1}{\rho} - D'') \geq 0. \qquad (54)$$

Notînd cu $\frac{1}{R_1}$ și $\frac{1}{R_2}$ rădăcinile ecuației

$$(EG - F^2)(\frac{1}{\rho})^2 - (ED'' + GD - 2FD')\frac{1}{\rho} + DD'' - D'^2 = 0 \qquad (55)$$

și, avînd în vedere că $EG - F^2 > 0$, rezultă că inegalitatea (54) este satisfăcută pentru

$$\frac{1}{R_1} \leq \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{R_2}.$$

Valorile $\frac{1}{R_1}$ și $\frac{1}{R_2}$ sînt deci valoarea minimă și maximă a curburii normale. Numim aceste curburi <u>curburile principale</u> în punctul M de pe suprafață.

Expresiile

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se numesc <u>curbura totală</u>, respectiv <u>curbura medie</u>, a suprafeței într-un punct M al ei.

Ținînd seama de ecuația (55), rezultă că aceste două expresii sînt

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{EG - F^2}.$$

Suprafețele care au curbura totală constantă se numesc <u>suprafețe cu curbura constantă</u>, iar suprafețele care au curbura medie nulă se numesc <u>suprafețe minime</u> (<u>minimale</u>).

Să considerăm că am făcut o schimbare de parametri pe suprafață,

$$u = u(u_1, u_2), \qquad v = v(u_1, u_2).$$

Coeficienții celor două forme fundamentale se schimbă după formulele (28), (28'), (48). Dacă notăm cu K_1, H_1 curbura totală și medie a suprafeței raportate la sistemul de parametrii u_1, v_1, deducem

$$K_1 = K, \qquad H_1 = H,$$

deci curbura totală şi curbura medie ale unei suprafeţe sînt invariante la o schimbare de parametri pe suprafaţă.

Să deducem acum expresia curburii totale şi a curburii medii a suprafeţei cînd aceasta este dată prin ecuaţia explicită

$$z = f(x,y).$$

Anterior am determinat expresiile coeficienţilor celor două forme fundamentale ale suprafeţei în acest caz (p.107,120) şi anume

$$E = 1+p^2, \quad F = pq, \quad G = 1+q^2,$$

$$D = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad D' = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Deci avem

$$K = \frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}, \quad H = \frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq}{1+p^2+q^2}.$$

Avînd în vedere teorema demonstrată mai sus, referitoare la suprafeţele desfăşurabile (p.125), rezultă:

Condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă să fie desfăşurabilă este ca ea să aibă curbura totală nulă.

Ca aplicaţie să determinăm curbura totală a sferei şi a pseudosferei.

Ecuaţiile parametrice ale sferei cu centrul în origine şi raza R sînt

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u.$$

Calculînd derivatele parţiale ale acestor funcţii, obţinem coeficienţii celor două forme fundamentale ale acestei suprafeţe

$$E=R^2, \quad F=0, \quad G=R^2\cos^2 u, \quad D=R, \quad D'=0, \quad D''=R\cos^2 u$$

şi deci curbura totală a sferei este

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

Sfera este o suprafaţă cu curbura totală pozitivă.

Ecuaţiile parametrice ale pseudosferei sînt

$x=R \sin u \cos v$, $y=R \sin u \sin v$, $z=R(\cos u+\ell n \operatorname{tg} \frac{u}{2})$.

Coeficienţii celor două forme fundamentale ale suprafeţei sînt

$$E = \frac{R^2\cos^2 u}{\sin^2 u}, \quad F=0, \quad G = R^2\sin^2 u, \quad D= -\frac{R \cos u}{\sin u},$$

$$D' = 0, \quad D'' = R \sin u \cos u$$

şi curbura totală a pseudosferei are valoarea

$$K = -\frac{1}{R^2}.$$

Pseudosfera este deci o suprafaţă cu curbura totală constantă negativă.

10. Liniile de curbură pe o suprafaţă

Curbele de pe o suprafaţă care trec printr-un punct M al acesteia şi ale căror curburi normale în punctul M sînt curburile principale în acest punct se numesc liniile de curbură ale suprafeţei.

Considerînd relaţia (53) în care am pus $m = \frac{du}{dv}$, adică relaţia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Dm^2+2D'm+D''}{Dm^2+2Fm + G},$$

obţinem valorile extreme ale funcţiei $\frac{1}{\rho}$, anulînd derivata acestei funcţii, considerată ca funcţie de m.

Avem

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{2(Dm+D')(Em^2+2Fm+G)-2(Em+F)(Dm^2+2D'm+D'')}{(Em^2 + 2 Fm + G)^2}.$$

Curburile principale ale suprafeţei în punctul M se obţin deci pentru valorile lui m, care sînt rădăcinile ecuaţiei

$$(Dm+D')(Em^2+2 Fm+G)-(Em+F)(Dm^2+2D'm+D'') = 0.$$

Această ecuaţie se mai poate scrie

$$\frac{Dm^2+2D'm + D''}{Em^2+ 2 Fm + G} = \frac{Dm + D'}{Em + F},$$

sau, în baza unei proprietăţi a proporţiilor,

$$\frac{Dm + D'}{Em + F} = \frac{D'm + D''}{Fm + G}.$$

Deci, liniile de curbură ale unei suprafeţe sînt determinate de ecuaţia diferenţială

$$(D\,du+D'dv)(F\,du+G\,dv)-(D'du+D''dv)(E\,du+F\,dv) = 0$$

sau

$$(ED'-FD)du^2+(ED''-GD)du\,dv+(FD''-GD')dv^2 = 0. \qquad (54)$$

In general, această ecuaţie are două rădăcini în $\frac{du}{dv}$ sau $\frac{dv}{du}$.

Ţinînd seama că avem

$$(ED''-GD)^2-4(FD''-GD')(ED'-FD) = \frac{4(EG-F^2)(ED'-FD)^2}{E^2} +$$

$$+ \left[ED''-GD - \frac{2F}{E}(ED'-FD)\right]^2 \geqslant 0, \qquad (54')$$

rezultă că ecuaţia (54) are rădăcini reale.

Rezolvînd (54), obţinem ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{du}{dv} = f_1(u,v), \qquad \frac{du}{dv} = f_2(u,v),$$

unde f_1 şi f_2 depind de E, F, G, D, D', D".

Din acestea găsim prin integrare curbele

$$F_1(u,v) = c_1, \qquad F_2(u,v) = c_2.$$

Pe o suprafaţă există deci două familii de linii de curbură.

Căutînd liniile de curbură care trec prin punctul $M(u_o,v_o)$, obţinem

$$F_1(u_o,v_o) = c_1, \qquad F_2(u_o,v_o) = c_2.$$

Deci, printr-un punct de pe suprafaţă trec două linii de curbură.

Dacă notăm cu $\frac{du}{dv}$ şi $\frac{\delta u}{\delta v}$ rădăcinile ecuaţiei (54), avem

$$\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} = \frac{GD-ED''}{ED'-FD}, \qquad \frac{du}{dv}\cdot\frac{\delta u}{\delta v} = \frac{FD''-GD'}{ED'-FD}. \qquad (55)$$

Notînd cu θ unghiul dintre cele două linii de curbură care trec prin punctul $M(u,v)$, avem

$$\cos\theta = \frac{E\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v} + F\left(\frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}\right) + G}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\frac{du}{dv}+G}\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\frac{\delta u}{\delta v}+G}}.$$

Ținînd seama de (55), rezultă

$$\cos\theta = 0,$$

deci $\theta = \frac{\pi}{2}$; prin urmare:

Liniile de curbură de pe o suprafață constituie un sistem ortogonal de curbe ale ei.

Să presupunem acum că am făcut o schimbare de parametri pe suprafață astfel încît liniile de curbură să fie curbe coordonate.

In acest caz, liniile de curbură fiind ortogonale, rezultă că avem $F = 0$ și ecuația liniilor de curbură se scrie

$$ED'du^2+(ED''-GD)du\,dv - GD'dv^2 = 0.$$

Această ecuație trebuie să fie verificată de curbele u=const. și v=const.

Rezultă că trebuie să avem

$$ED' = 0, \qquad GD' = 0,$$

adică $D'=0$.

Deci, sistemul de coordonate ortogonale pe suprafață pentru care avem $D'=0$ este format din liniile de curbură și reciproc.

Un punct de pe suprafață în care liniile de curbură sînt nedeterminate se numește punct ombilical al suprafeței.

Din ecuația (54) rezultă că un punct al suprafeței este ombilical dacă în acest punct subzistă relațiile

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}. \qquad (56)$$

Intr-un punct ombilical avem

$$\frac{1}{R_n} = \frac{D}{E},$$

deci curburile normale într-un punct ombilical al curbelor de pe suprafață care trec prin acest punct sînt egale.

Din formula (54') rezultă că dacă într-un punct al suprafeţei liniile de curbură sînt confundate, acesta este punct ombilical.

Să determinăm suprafeţele care au toate punctele ombilicale.

Fie o suprafaţă de ecuaţie

$$z = z(x,y).$$

Relaţia (56) devine

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Notînd cu $\lambda(x,y)$ valoarea comună a acestor rapoarte, avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \lambda\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lambda\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{57}$$

Derivînd prima ecuaţie în raport cu y şi a doua în raport cu x şi ţinînd seama că

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},$$

obţinem

$$pq\frac{\partial \lambda}{\partial x} - (1+p^2)\frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\lambda^2 q. \tag{58}$$

Analog, derivînd a doua ecuaţie (57) în raport cu y şi a treia în raport cu x, găsim

$$(1+q^2)\frac{\partial \lambda}{\partial x} - pq\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda^2 p. \tag{58'}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile (58), (58'), deducem

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda^2 p, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda^2 q,$$

sau, presupunînd $\lambda \neq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

de unde rezultă

$$z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Inlocuind pe λ cu $-\frac{1}{z}$ în ecuaţiile (57), obţinem

$$\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2(z^2)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2} = -2. \qquad (57')$$

Din a doua ecuaţie (57') rezultă că

$$z^2 = f(x) + g(y), \qquad (59)$$

care, înlocuită în celelalte ecuaţii (57'), ne dă

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -2, \quad \frac{d^2g}{dg^2} = -2,$$

adică

$$f(x) = -x^2 + 2a_1x + b, \quad g(y) = -y^2 + 2a_2y + c.$$

Cu aceste valori ecuaţia (59) devine

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2a_2y + a_3 = 0, \qquad (a_3 = -b-c),$$

deci suprafaţa este o sferă.

Dacă $\lambda = 0$, din (57) rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y^2} = 0.$$

Suprafaţa este planul $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Aşadar, <u>singurele suprafeţe care au toate punctele ombilicale sînt sfera şi planul</u>.

Să demonstrăm acum teorema:

<u>Dacă normalele la o suprafaţă în lungul unei curbe formează o suprafaţă desfăşurabilă, curba este o linie de curbură a suprafeţei şi reciproc</u>.

Să considerăm deci o suprafaţă de ecuaţii

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

Cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţă sînt

$$\lambda = \frac{y'_u z'_v - y'_v z'_u}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \mu = \frac{z'_u x'_v - z'_v x'_u}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \nu = \frac{x'_u y'_v - x'_v y'_u}{\sqrt{EG-F^2}}. \qquad (60)$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei riglate generate de normalele la suprafaţă de-a lungul unei curbe (C) se scriu

$$\begin{cases} X = x(u,v) + w\,\lambda(u,v), \\ Y = y(u,v) + w\,\mu(u,v), \\ Z = z(u,v) + w\,\nu(u,v), \end{cases} \tag{61}$$

unde u şi v sînt funcţii de un parametru t.

Dacă notăm $\vec{r}_o = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $\vec{a} = (u,v)\vec{i} + \mu(u,v)\vec{j} + \nu(u,v)\vec{k}$, condiţia ca suprafaţa (61) să fie desfăşurabilă este ca vectorul $\frac{d\vec{a}}{dt}$ să fie în planul vectorilor $\frac{d\vec{r}_o}{dt}$ şi $\vec{a}$ (§ 3) sau ca vectorul $d\vec{a}$ să fie în planul vectorilor $d\vec{r}_o$ şi $\vec{a}$, adică

$$d\vec{a} = \alpha\, d\vec{r}_o + \beta\vec{a},$$

relaţie care se scrie

$$d\lambda = \alpha\,dx + \beta\lambda, \quad d\mu = \alpha\,dy + \beta\mu, \quad d\nu = \alpha\,dz + \beta\nu. \tag{62}$$

Ţinînd seama că λ, μ, ν sînt cosinusuri directoare ale normalei la suprafaţă şi că dx, dy, dz sînt parametrii directori ai tangentei la curba (C), rezultă că

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0. \tag{63}$$

Diferenţiind prima relaţie (63), obţinem

$$\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu = 0. \tag{63'}$$

Dacă înmulţim prima relaţie (62) cu λ, a doua cu μ şi a treia cu ν şi le adunăm, obţinem, avînd în vedere relaţiile (63) (63'), $\beta = 0$.

De asemenea, înmulţind relaţiile (62), respectiv, cu dx, dy, dz şi adunîndu-le, găsim, în baza relaţiei (63),

$$\alpha\,ds^2 = d\lambda\,dx + d\mu\,dy + d\nu\,dz.$$

Pe baza relaţiilor (43), (43') rezultă

$$\alpha = - \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

sau, avînd în vedere formula (53),

$$\alpha = - \frac{1}{\rho},$$

ρ fiind raza de curbură normală de-a lungul curbei (C). Formulele (62) se scriu deci

$$d\lambda + \frac{1}{\rho}dx = 0, \quad d\mu + \frac{1}{\rho}dy = 0, \quad d\nu + \frac{1}{\rho}dz = 0. \qquad (62')$$

Avînd în vedere că $dx = x'_u du + x'_v dv, \ldots$, a doua formulă (63) se scrie

$$\lambda x'_u + \mu y'_u + \nu z'_u = 0, \quad \lambda x'_v + \mu y'_v + \nu z'_v = 0.$$

Derivînd aceste relaţii în raport cu u şi v şi ţinînd seama de (43'), rezultă

$$\begin{aligned} D &= - (\lambda'_u x'_u + \mu'_u y'_u + \nu'_u z'_u), \\ D' &= - (\lambda'_u x'_v + \mu'_u y'_v + \nu'_u z'_v) = - (\lambda'_v x'_u + \mu'_v y'_u + \nu'_v z'_u), \\ D'' &= - (\lambda'_v x'_v + \mu'_v y'_v + \nu'_v z'_v). \end{aligned} \qquad (64)$$

Inmulţind prima relaţie (64) cu du şi a doua cu dv şi adunîndu-le, obţinem

$$D\,du + D'dv = - \lambda'_u (dx'_u du + x'_v dv) - \mu'_u (y'_u du + y'_v dv) - \nu'_u (z'_u du + z'_v dv)$$

sau, avînd în vedere relaţiile (62'),

$$D\,du + D'dv = \frac{1}{\rho}(E\,du + F\,dv). \qquad (65)$$

Analog, din a doua şi a treia relaţie (64) deducem

$$D'du + D'dv = \frac{1}{\rho}(F\,du + G\,dv). \qquad (65')$$

Eliminînd pe ρ între aceste relaţii, rezultă ecuaţia

$$\frac{D\,du + D'dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{D'du + D''dv}{F\,du + G\,dv},$$

care este tocmai ecuaţia liniilor de curbură.

Deci curba (C) este o linie de curbură a suprafeţei.

Reciproc, să presupunem acum că curba (C) este o linie de curbură.

Printr-o schimbare de parametri putem presupune că am raportat suprafaţa la liniile de curbură, deci avem $F = D' = 0$.

Să considerăm normalele în lungul unei linii de curbură, de exemplu în lungul liniei $v=const$.

Cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţă fiind λ, μ, ν, din a doua relaţie (64) rezultă că

$$\lambda'_u x'_v + \mu'_u y'_v + \nu'_u z'_v = - D',$$

adică

$$\lambda'_u x'_v + \mu'_u y'_v + \nu'_u z'_v = 0.$$

Dacă notăm cu $\vec{N}$ versorul normalei la suprafaţă, rezultă că vectorul $\vec{N}'_u$ este perpendicular pe tangenta la curba $v=const$.

Vectorul derivat al versorului normalei la suprafaţă în lungul curbei $v=const$. are deci direcţia tangentei la această curbă şi suprafaţa este desfăşurabilă.

Teorema este demonstrată.

De asemenea, de aici rezultă că formulele (62') au loc numai în lungul unei linii de curbură. Aceste formule se numesc formulele lui Olinde Rodrigues.

Ele se mai pot scrie, în mod concis, sub forma

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{t}, \qquad (66)$$

unde $\vec{t}$ este versorul tangentei la linia de curbură.

Să demonstrăm acum teorema lui Ioachimstal:

Dacă două suprafeţe (S) şi (S_1) se intersectează după o curbă (C), care este linie de curbură pentru amîndouă, unghiul celor două suprafeţe de-a lungul curbei (C) este constant.

Notăm cu $\vec{N}(\lambda, \mu, \nu)$ versorul normalei la suprafaţa (S), cu $\vec{N}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ versorul normalei la suprafaţa (S_1) şi cu

θ unghiul dintre cele două suprafeţe într-un punct al curbei (C). Avem

$$\cos\theta = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = \vec{N}\cdot\vec{N}_1.$$

Diferenţiind această relaţie de-a lungul curbei (C), deducem

$$-\sin\theta\, d\theta = \vec{N}\, d\vec{N}_1 + \vec{N}_1\, d\vec{N}.$$

Ţinînd seama aici de formula (66), obţinem

$$-\sin\theta\, d\theta = \frac{ds}{\rho}(\vec{N}\vec{t} + \vec{N}_1\vec{t}).$$

Dar vectorii $\vec{N}$ şi $\vec{N}_1$ sînt perpendiculari pe $\vec{t}$, deci $\vec{N}\vec{t} = 0$, $\vec{N}_1\vec{t} = 0$, adică

$$d\theta = 0.$$

Rezultă $\theta = \text{const}$.

Reciproca teoremei lui Ioachimstal se enunţă:

<u>Dacă două suprafeţe (S) şi (S_1) se intersectează după o curbă (C), care este linie de curbură pentru una din suprafeţe, iar unghiul suprafeţelor de-a lungul curbei (C) este constant, atunci aceasta este linie de curbură şi pentru a doua suprafaţă.</u>

Într-adevăr, să presupunem că (C) este linie de curbură pentru suprafaţa S şi că unghiul θ dintre cele două suprafeţe într-un punct al curbei (C) este constant. Rezultă

$$\vec{N}\cdot\vec{N}_1 = \text{const}.$$

Derivînd în raport cu s această relaţie, obţinem

$$\vec{N}\frac{d\vec{N}_1}{ds} + \vec{N}_1\frac{d\vec{N}}{ds} = 0. \qquad (67)$$

Dar (C) este linie de curbură pentru suprafaţa S, deci

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{t} \qquad (68)$$

şi, ţinînd seama că $\vec{N}_1\cdot\vec{t} = 0$, din (67) rezultă

$$\vec{N}\frac{d\vec{N}_1}{ds} = 0. \qquad (67')$$

Pe de altă parte, relaţia $\vec{N}_1^2 = 1$ ne dă

$$\vec{N}_1\frac{d\vec{N}_1}{ds} = 0. \qquad (67'')$$

Presupunînd $\theta \neq 0$, putem scrie

$$\frac{d\vec{N}_1}{ds} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{N}_1.$$

Inmulţind scalar această relaţie cu $\vec{N}$ şi ţinînd seama de (67') şi că acest versor este perpendicular pe $\vec{t}$, găsim

$$\beta + \gamma\cos\theta = 0.$$

Tot astfel, înmulţind scalar cu $\vec{N}_1$ şi ţinînd seama de (67''), deducem

$$\beta\cos\theta + \gamma = 0.$$

Din aceste relaţii scoatem

$$\beta = \gamma = 0.$$

Deci

$$\frac{d\vec{N}_1}{ds} = \alpha\vec{t}. \qquad (68')$$

Curba (C) este deci linie de curbură pentru suprafaţa (S_1).

Dacă $\theta = 0$, rezultă $\vec{N}_1 = \vec{N}$ şi relaţia (68) se scrie

$$\frac{d\vec{N}_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{t}$$

şi curba (C) este linie de curbură pentru suprafaţa (S_1).

Teorema este complet demonstrată.

Ţinînd seama că sfera şi planul au liniile de curbură nedeterminate, adică orice curbă de pe sferă sau plan este o linie de curbură a acesteia, urmează că:

- <u>Dacă o suprafaţă (S) este intersectată de un plan sau o sferă după un unghi constant, curba de intersecţie este linie de curbură pentru suprafaţa (S)</u>.

Ca aplicaţie să determinăm liniile de curbură ale înfăşurătorii familiei de plane

$$2ux + 2vy + (1-u^2-v^2)z - f(u) - \varphi(v) = 0, \qquad (69)$$

unde u şi v sînt parametri.

Pentru aceasta trebuie să rezolvăm sistemul format din ecuaţia (69) şi cele obţinute prin derivarea acesteia în raport cu u şi v, adică

$$2x - 2uz - f'(u) = 0, \qquad (69')$$

$$2y - 2vz - \varphi'(v) = 0. \qquad (69'')$$

Obţinem

$$\begin{cases} x = \dfrac{2uf(u)+(1-u^2+v^2)f'(u)+2u\varphi(v)-2uv\varphi'(v)}{2(1+u^2+v^2)}, \\ y = \dfrac{2vf(u)-2uvf'(u)+2v\varphi(v)+(1+u^2-v^2)\varphi'(v)}{2(1+u^2+v^2)}, \\ z = \dfrac{f(u)-uf'(u)+\varphi(v)-v\varphi'(v)}{1+u^2+v^2}, \end{cases} \qquad (70)$$

care reprezintă ecuaţiile parametrice ale înfăşurătorii.

Această suprafaţă, fiind înfăşurătoarea familiei de plane (69), este tangentă la acest plan, deci normala la suprafaţa (70) are cosinusurile directoare

$$\lambda = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad \mu = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad \nu = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}.$$

Normala la planul (69') are cosinusurile directoare

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Avem

$$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Deci, planul (69'), (u=const.) intersectează suprafaţa (70) după o curbă de-a lungul căreia unghiul este constant. Curbele (70) (69') sînt linii de curbură pentru suprafaţa (70). Analog, curbele (70), (69") sînt linii de curbură pentru această suprafaţă.

11. Formula lui Euler. Indicatoarea lui Dupin

Să considerăm o suprafaţă pe care o presupunem raportată la liniile de curbură ca linii de coordonate u=const. şi v = const. In acest caz avem

$$F = D' = 0.$$

Formula (53) devine

$$\frac{1}{\rho} = \frac{D\,du^2+D''dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2}. \qquad (71)$$

Curburile principale date de ecuaţia (50) au valorile

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D}{E}, \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{D''}{G}.$$

Fie φ unghiul dintre curba de pe suprafaţă care are în punctul M(u,v) drept curbură tocmai curbura $\frac{1}{\rho}$ şi curba v = const. a cărei curbură este $\frac{1}{R_1}$.

Formula (31) care ne dă unghiul dintre două curbe pe suprafaţă devine (avem F=D, $\delta v=0$):

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}}.$$

De aici deducem

$$\cos^2\varphi = \frac{E\,du^2}{E\,du^2+G\,dv^2}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{G\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2}.$$

Cu aceste valori şi ţinînd seama de expresiile curburilor principale, formula (71) devine

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \qquad (72)$$

Aceasta este formula lui Euler.

Ţinînd seama că $D'=0$, ecuaţia liniilor asimptotice ale suprafeţei este

$$D\,du^2 + D''dv^2 = 0.$$

Dacă curburile principale au acelaşi semn, din formula lui Euler rezultă că curbura normală $\frac{1}{\rho}$ păstrează acelaşi semn, deci toate secţiunile normale în M au concavitatea de aceeaşi parte a planului tangent în M la suprafaţă. Spunem că suprafaţa este convexă în punctul M.

Punctul M este punct eliptic al suprafeţei, căci $\frac{1}{R_1}$ şi $\frac{1}{R_2}$ avînd acelaşi semn rezultă că $DD'' > 0$ şi liniile asimptotice care trec prin M sînt imaginare.

Dacă curburile principale au semne contrare, curbura normală este pozitivă pentru anumite valori ale lui φ şi negativă pentru altele. Unele secţiuni normale au concavitatea de o parte a planului tangent la suprafaţă în M, iar altele de cealaltă parte. Rezultă că planul tangent la suprafaţă în M o intersectează. Suprafaţa se numeşte suprafaţă cu curburi opuse în M.

Punctul M este hiperbolic, căci în acest caz avem $DD'' < 0$ şi deci liniile asimptotice care trec prin M sînt reale.

Cînd una din curburile principale este nulă, curbura normală are acelaşi semn pentru toate valorile lui φ, în afară de o valoare pentru care aceasta este nulă. Secţiunile normale în M au concavitatea de aceeaşi parte a planului tangent, afară de secţiunea corespunzătoare valorii lui φ care anulează curbura normală.

Punctul M este parabolic, căci $DD'' = 0$ şi liniile asimptotice sînt confundate.

Notînd cu R_n curbura secţiunii normale (C_n) corespunzătoare tangentei (du,dv), avem

$$\rho = \varepsilon R_n , \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

unde $\varepsilon = 1$, dacă normala principală la curba (C_n) are acelaşi sens cu normala la suprafaţă, şi $\varepsilon = -1$, dacă cele două normale au sensuri contrare.

Formula (72) se scrie

$$\frac{R_n \cos^2\varphi}{R_1} + \frac{R_n \sin^2\varphi}{R_2} = \varepsilon \,. \qquad (72')$$

Dacă punctul M este eliptic, curburile principale au acelaşi semn, vom presupune că $R_1 > R_2 > 0$ şi deci în formula (72') avem $\varepsilon = 1$.

Notînd

$$\xi = \sqrt{R_n}\cos\varphi\,, \qquad \eta = \sqrt{R_n}\sin\varphi\,, \qquad (73)$$

ecuaţia (72') se scrie

$$\frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2} = 1$$

şi reprezintă o elipsă de semiaxe $\sqrt{R_1} > \sqrt{R_2}$ situată în planul raportat la sistemul de axe ortogonale $M\xi\eta$.

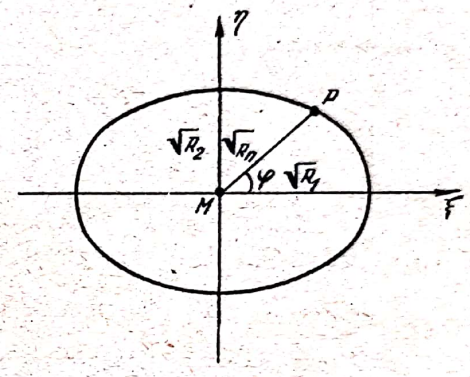


Fig.25

Această elipsă se numeşte <u>indicatoarea lui Dupin</u> relativă la punctul eliptic M.

Se poate urmări variaţia razei de curbură R_n urmărind mişcarea punctului curent de pe elipsă.

Dacă punctul M este hiperbolic, curburile principale au semne contrare. In formula (72') luăm $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$ după cum secţiunile normale au concavitatea îndreptată spre partea pozitivă a normalei în M sau nu. Cu notaţia (73) formula (72') se descompune în două formule

$$\frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2} = 1,$$

$$\frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2} = -1.$$

Acestea sînt două hiperbole conjugate care constituie <u>indicatoarea lui Dupin</u> relativă la punctul hiperbolic M.

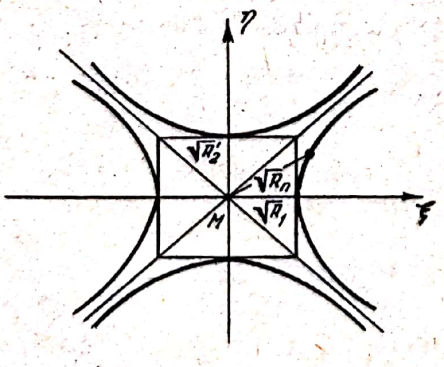


Fig.26

Dacă punctul M este parabolic, presupunînd $\frac{1}{R_1} > 0$, $\frac{1}{R_2} = 0$, cu notaţia (73) formula (72') devine

$$\frac{\xi^2}{R_1} = 1,$$

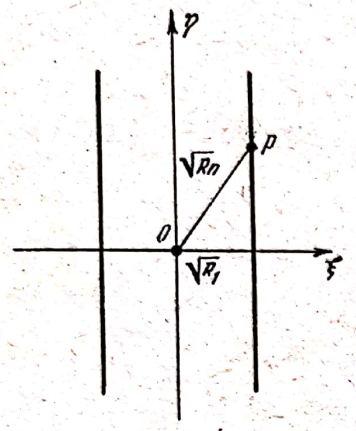


Fig.27

care reprezintă două drepte paralele

$$\xi = \sqrt{R_1},$$

$$\xi = -\sqrt{R_1}.$$

Aceste două drepte formează <u>indicatoarea lui Dupin</u> relativă la punctul parabolic M.

12. <u>Curbura geodezică. Linii geodezice</u>

Să considerăm o suprafaţă ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

Fie (C) curba pe suprafaţă a cărei normală principală într-un punct M face cu normala la suprafaţă în M unghiul θ şi a cărei rază de curbură este R.

Expresia

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\theta}{R} \qquad (74)$$

se numeşte <u>curbura geodezică</u> a curbei (C).

Să notăm cu $\vec{\sigma}$ un vector situat pe normala principală la curba (C) şi a cărei mărime este $\frac{1}{R}$. Dacă $\vec{n}$ este versorul normalei principale la curba (C), atunci

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{R}\vec{n}.$$

Proiecţia vectorului $\vec{\sigma}$ pe planul tangent la suprafaţă este tocmai curbura geodezică $\frac{1}{\rho_g}$.

Direcţia (d), după care se proiectează vectorul $\vec{\sigma}$ pe planul tangent la suprafaţă, este perpendiculară pe tangenta

la curba (C), al cărei versor este $\vec{t}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$. De asemenea, această direcţie este perpendiculară pe normala la suprafaţă, al cărei versor este $\vec{N}(\lambda, \mu, \nu)$.

Versorul direcţiei d este deci

$$\vec{w} = \vec{t} \times \vec{N}.$$

Ţinînd seama de formulele lui Frenet referitoare la o curbă strîmbă, rezultă că

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{t}}{ds}.$$

Deci, curbură geodezică a curbei (C) este proiecţia vectorului $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{t}}{ds}$ pe vectorul $\vec{w} = \vec{t} \times \vec{N}$, adică

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{w},$$

unde semnul este astfel ales încît curbura geodezică să fie pozitivă.

Deci,

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm \vec{\sigma} \cdot (\vec{t} \times \vec{N})$$

sau

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}. \qquad (74')$$

Dezvoltînd acest determinant, obţinem

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm \sum \left(\mu \frac{dz}{ds} - \nu \frac{dy}{ds}\right) \frac{d^2x}{ds^2},$$

unde semnul sumă este extins la literele x, y, z, respectiv λ, μ, ν.

Avem

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţă sînt

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ţinînd seama de expresiile coeficienţilor E, F, G ai primei forme fundamentale, obţinem relaţiile

$$E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\Delta}\left(\mu\frac{\partial z}{\partial u} - \nu\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\Delta}\left(\mu\frac{\partial z}{\partial v} - \nu\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

Cu aceste valori obţinem

$$\mu\frac{dz}{ds} - \nu\frac{dy}{ds} = \mu\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{ds}\right) - \nu\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{ds}\right) =$$

$$= \left(\mu\frac{\partial z}{\partial u} - \nu\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(\mu\frac{\partial z}{\partial v} - \nu\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{dv}{ds} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right],$$

deci

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\sum\frac{\partial x}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2}\right] - \left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\sum\frac{\partial x}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2}\right]\right\}.$$

Dacă derivăm expresiile coeficienţilor primei forme fundamentale a suprafeţei în raport cu u şi v, obţinem

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad (75)$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Cu aceste expresii, valoarea curburii geodezice este

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\left(F\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}\right)\left[E\frac{d^2u}{ds^2}+F\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{1}{2}E_u'\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\right.\right.$$

$$+E_v'\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+\left(F_v'-\frac{1}{2}G_u'\right)-\frac{1}{2}G_u'\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\Big]-$$

$$-\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right)\left[F\frac{d^2u}{ds^2}+G\frac{d^2v}{ds^2}+\left(F_u'-\frac{1}{2}E_v'\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G_u'\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}G_v'\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]\right\}, \qquad (76)$$

unde am notat $E_u' = \frac{\partial E}{\partial u}$, ...

<u>Valoarea curburii geodezice depinde deci numai de coeficienţii metricei suprafeţei</u>.

Curbele de pe suprafaţă care au curbura geodezică nulă se numesc <u>curbe geodezice</u> ale suprafeţei.

Ţinînd seama de expresia (74) a curburii geodezice, rezultă:

<u>Planul osculator al unei geodezice conţine normale la suprafaţă</u>.

Avînd în vedere relaţia (74'), deducem că ecuaţia geodezicelor unei suprafeţe este

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

De asemenea, din (76) rezultă că ecuaţia lor se mai scrie

$$(F\,du+G\,dv)\left[E\,d^2u+F\,d^2v+\frac{1}{2}E_u'\,du^2+E_v'\,du\,dv+\left(F_v'\frac{1}{2}G_u'\right)dv^2\right]-$$

$$-(E\,du+F\,dv)\left[F\,d^2u+G\,d^2v+\left(F_u'-\frac{1}{2}E_v'\right)du^2+G_u'\,du\,dv+\frac{1}{2}G_v'dv^2\right]=0. \qquad (77)$$

Să alegem ca parametru pe geodezică parametrul u. In acest caz, dacă notăm $\frac{dv}{du} = v'$, $\frac{d^2v}{du^2} = v''$, avem

$$d^2u = 0, \qquad dv = v'du, \qquad d^2v = v''du^2$$

şi ecuaţia (77) devine

$$2\Delta v'' = \left[G(2F_v' - G_u') - FG_v'\right] v'^3 + \left[2GE_v' + F(2F_v' - 3G_u') - EG_v'\right] v'^2 +$$

$$+\left[GE_u' - 2EG_u' - F(2F_u' - 3E_v')\right] v' + FE_u' - E(2F_u' - E_v') \ . \qquad (78)$$

Presupunînd acum că curbele coordonate pe suprafaţă sînt ortogonale, deci $F = 0$, ecuaţia geodezicelor devine

$$2EG\, v'' = -GG_u' v' + (2GE_v' - EG_v') v + (GE_u' - 2EG_u') v' + EE_v' \ .$$

Dacă curbele v=const. sînt curbe geodezice, de aici rezultă

$$E_v' = 0,$$

adică $E=E(u)$ şi, reciproc, dacă $E=E(u)$, curbele v=const. sînt geodezice.

Metrica suprafeţei se scrie în acest caz

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + G(u,v)\, dv^2 .$$

Făcînd schimbarea de parametri

$$U = \int \sqrt{E(u)}\, du, \qquad V = v,$$

metrica devine

$$ds^2 = dU^2 + G\, dV^2 .$$

Această formă a metricei se numeşte <u>forma geodezică</u> a metricei suprafeţei, iar coordonatele curbilinii U şi V se numesc <u>coordonate geodezice</u> pe suprafaţă.

Să demonstrăm acum următoarea teoremă:

<u>Distanţa între două puncte A şi B ale unei geodezice, măsurată pe geodezică, este mai mică decît distanţa dintre cele două puncte măsurată pe orice altă curbă de pe suprafaţă ce trece prin ele şi reciproc</u>.

Să presupunem că metrica suprafeţei este adusă la forma geodezică

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$$

şi fie $v=v_0$ o geodezică a suprafeţei.

Distanţa dintre două puncte $A(u_0,v_0)$, $B(u_1,v_0)$ ale acestei geodezice măsurată pe geodezică este

$$s = \int_{u_0}^{u_1} ds = \int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0.$$

Să considerăm acum o altă curbă care trece prin A şi B a cărei ecuaţie este

$$v = \varphi(u), \qquad (\varphi' \neq 0).$$

Lungimea arcului de curbă AB este

$$s_1 = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1+G\ \varphi'^2}\,du.$$

Dar $G > 0$, deci

$$1 + G\,\varphi'^2 > 1,$$

adică

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1+G\ \varphi'^2}\,du > \int_{u_0}^{u_1} du.$$

Rezultă că $s_1 > s$.

Pentru a demonstra <u>reciproca</u>, să considerăm o curbă care trece prin punctele A şi B şi pe care distanţa dintre cele două puncte este cea mai mică şi să arătăm că această curbă este o geodezică.

Fie deci

$$u = u(s), \qquad v = v(s) \tag{79}$$

coordonatele unui punct oarecare de pe curba care trece prin punctele A şi B pentru care distanţa dintre cele două puncte este cea mai scurtă. Punctele A şi B corespund valorilor s_0, respectiv s_1 ale parametrului.

Să considerăm o altă curbă care trece prin punctele A şi B şi fie

$$u = u(s) + \delta u(s), \qquad v = v(s) + \delta v(s) \tag{80}$$

coordonatele unui punct oarecare de pe această curbă.

Ţinînd seama că şi această curbă trece prin A şi B, rezultă că

$$\delta u(s_0) = \delta u(s_1) = 0, \qquad \delta v(s_0) = \delta v(s_1) = 0.$$

Distanţa dintre punctele A şi B măsurată pe geodezica (79) este

$$l = \int_{s_0}^{s_1} ds$$

unde ds^2 este metrica suprafeţei.

Pe curba (80), distanţa dintre punctele A şi B este $l + \delta l$, unde

$$\delta l = \int_{s_0}^{s_1} \delta\, ds .$$

Diferenţiind cu operatorul δ metrica ds^2 a suprafeţei, obţinem

$$2ds\,\delta\, ds = \delta E\, du^2 + 2\delta F\, du\, dv + \delta G\, dv^2 + 2E\, du\,\delta\, du + 2F(du\,\delta\, dv + dv\,\delta\, du) + 2G\, dv\,\delta\, dv.$$

Impărţind această relaţia cu 2ds şi punînd $\frac{du}{ds} = \dot{u}$, $\frac{dv}{ds} = \dot{v}$, găsim

$$\delta\, ds = \frac{1}{2}(\delta E\dot{u}^2 + 2\,\delta F\dot{u}\dot{v} + \delta G\dot{v}^2)ds + E\dot{u}\,\delta\, du + F(\dot{u}\,\delta\, dv + \dot{v}\,\delta\, du) + G\dot{v}\,\delta\, dv,$$

de unde

$$\delta l = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1} (\delta E\dot{u}^2 + 2\,\delta E\dot{u}\dot{v} + \delta G\dot{v}^2)\, ds + \int_{s_0}^{s_1} \left[E\dot{u}\,\delta\, du + F(\dot{u}\,\delta\, dv + \dot{v}\,\delta\, du) + G\dot{v}\,\delta\, dv\right] . \qquad (81)$$

Cum însă

$$\delta E = E'_u\,\delta u + E'_v\,\delta v, \ \ldots$$

prima integrală din membrul doi al relaţiei (81) are valoarea

$$\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1}\left[(E_u'\dot{u}^2 + 2F_u'\dot{u}\dot{v} + G_u'\dot{u}^2)\delta u + (E_v'\dot{u}^2 + 2F_v'\dot{u}\,\dot{v} + G_v'\dot{v}^2)\delta v\right]ds.$$

Pentru a calcula valoarea celei de-a doua integrale din membrul doi al egalității (81), să calculăm integrala

$$I = \int_{s_0}^{s_1} E\dot{u}\,\delta\,du.$$

Schimbînd aici pe δ du în $d\delta u$ și integrînd prin părți avem

$$I = \int_{s_0}^{s_1} E\dot{u}d\,\delta u = (E\dot{u}\,\delta u)\Big|_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1}\delta u d(E\dot{u}).$$

Dar $\delta u(s_0) = \delta u(s_1)$, deci

$$(E\dot{u}\,\delta u)\Big|_{s_0}^{s_1} = 0.$$

De asemenea avem

$$d(E\dot{u}) = \dot{u}\,dE + Ed\dot{u} = \dot{u}(E_u'du + E_v'dv) + E\ddot{u}\,ds = (E_u'\dot{u}^2 + E_v'\dot{u}\dot{v} + E\ddot{u})ds,$$

adică

$$I = -\int_{s_0}^{s_1}\left[(E\ddot{u} + E_u'\dot{u}^2 + E_v'\dot{u}\dot{v})\,\delta u\right]ds.$$

Cu aceste valori, relația (81) devine

$$\delta l = -\int_{s_0}^{s_1}\left[E\ddot{u} + F\ddot{v} + \frac{E_u'}{2}\dot{u}^2 + E_v'\dot{u}\dot{v} + (F_v' - \frac{G_u'}{2})\dot{v}^2\right]\delta u\,ds -$$

$$-\int_{s_0}^{s_1}\left[F\ddot{u} + G\ddot{v} + (F_u' - \frac{E_v'}{2})\dot{u}^2 + G_u'\dot{u}\dot{v} + \frac{G_v'}{2}\dot{v}^2\right]\delta v\,ds.$$

Pe curba (79) distanța dintre punctele A și B este mai scurtă decît distanța pe orice altă curbă, deci pentru această curbă avem $\delta l = 0$, adică

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} + \frac{E_u'}{2}\dot{u}^2 + E_v'\dot{u}\dot{v} + (F_v' - \frac{G_u'}{2})\dot{v}^2 = 0, \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} + (F_u' - \frac{E_v'}{2})\dot{u}^2 + G_u'\dot{u}\dot{v} + \frac{G_v'}{2}\dot{v} = 0. \end{cases} \qquad (82)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuaţii definesc curba (79).

Luînd ca parametru pe curba (79) pe u şi notînd

$$\frac{dv}{du} = v', \qquad \frac{d^2v}{du^2} = v'' ,$$

avem

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{ds} = v' \cdot \dot{u},$$

$$\ddot{v} = \frac{d\dot{v}}{ds} = \frac{d(v'\dot{u})}{ds} = v'\ddot{u} + \dot{u}\frac{dv'}{du}\frac{du}{ds} = v'\ddot{u} + \dot{u}^2 v''.$$

Cu acestea, ecuaţiile (82) se scriu

$$\begin{cases} (E + Fv')\ddot{u} + \left[Fv'' + \left(F_v' - \frac{G_u'}{2}\right)v'^2 + E_v'v' + \frac{E_u'}{2}\right]\dot{u}^2 = 0, \\ (F + Gv')\ddot{u} + \left(Gv'' + \frac{G_v'}{2}v'^2 + G_u'v' + F_u' - \frac{E_v'}{2}\right)\dot{u}^2 = 0 \end{cases}$$

Eliminînd între aceste două ecuaţii pe $\dot{u}$ şi $\ddot{u}$, obţinem ecuaţia (78) a geodezicelor unei suprafeţe.

Ca aplicaţie să determinăm geodezicele planului.

Ecuaţiile parametrice ale planului fiind

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \alpha u + \beta v + \delta ,$$

metrica lui este

$$ds^2 = (1+\alpha^2)du^2 + 2\alpha\beta\, du\, dv + (1+\beta^2)dv^2.$$

Ecuaţia (78) devine

$$v'' = 0,$$

a cărei soluţie este

$$v = c_1 u + c_2 .$$

De aici rezultă că geodezicele planului sînt dreptele lui.

13. Proprietăţi intrinseci. Teorema lui Gauss

Am văzut în paragraful precedent că expresia curburii geodezice şi geodezicele unei suprafeţe depind numai de metrica suprafeţei.

Proprietăţile unei suprafeţe care depind numai de metrica ei se numesc <u>proprietăţi intrinseci</u> ale suprafeţei.

Să demonstrăm acum:

<u>T e o r e m a l u i G a u s s. Curbura totală a unei suprafeţe depinde numai de metrica ei.</u>

Fie deci o suprafaţă ale cărei ecuaţii parametrice sînt

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v).$$

Curbura totală a suprafeţei este

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

unde E, G, F sînt coeficienţii primei forme fundamentale, iar D, D', D'' sînt coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale.

Avem

$$D = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{u^2} & y''_{u^2} & z''_{u^2} \end{vmatrix}, \qquad D'' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{v^2} & y''_{v^2} & z''_{v^2} \end{vmatrix}.$$

Făcînd produsul celor doi determinanţi (linii cu linii), obţinem

$$DD'' = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum x'^2_u & \sum x'_u x'_v & \sum x'_u x''_{v^2} \\ \sum x'_u x'_v & \sum x'^2_v & \sum x'_v x''_{v^2} \\ \sum x'_u x''_{u^2} & \sum x'_v x''_{u^2} & \sum x'_{u^2} x''_{v^2} \end{vmatrix}.$$

Ţinînd seama aici de formulele (75) şi notînd

$$M = \sum x''_{u^2} x''_{v^2},$$

găsim

$$DD'' = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E & F & F'_v - \frac{G'_u}{2} \\ F & G & \frac{G'_v}{2} \\ \frac{E'_u}{2} & F'_u - \frac{E'_v}{2} & M \end{vmatrix} .$$

Analog găsim

$$D'^2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E & F & \frac{E'_v}{2} \\ F & G & \frac{G'_u}{2} \\ \frac{E'_v}{2} & \frac{G'_u}{2} & N \end{vmatrix} ,$$

unde am pus

$$N = \sum x''^2_{uv} .$$

Calculînd derivatele de ordinul doi ale coeficienţilor metricei suprafeţei, obţinem

$$E''_{v^2} = 2\sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} ,$$

$$G''_{u^2} = 2\sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} ,$$

$$F''_{uv} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} + \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} ,$$

de unde rezultă

$$M - N = \frac{2F''_{uv} - E''_{v^2} - G''_{u^2}}{2} .$$

Cu aceste valori, expresia curburii totale K a suprafeţei este dată de relaţia

$$4\Delta^2 K = 2\Delta(2F''_{uv} - E''_{v^2} - G''_{u^2}) + E(G'^2_u + E'_v G'_v - 2G'_v F'_u) +$$

$$+ F(E'_u G'_v - G'_u E'_v - 2F'_u G'_u - 2E'_v F'_v + 4F'_u F'_v) +$$

$$+ G(E'^2_v + E'_u G'_u - 2E'_u F'_v), \qquad (83)$$

care demonstrează teorema lui Gauss.

Dacă coordonatele u şi v sînt ortogonale, avem F=0 şi formula (83) devine

$$K = -\frac{E''_{v^2} + G''_{u^2}}{2EG} + \frac{EG'^2_u + GE'^2_v + EE'_v G'_v + GE'_u G'_u}{4E^2G^2}.$$

In cazul cînd coordonatele u şi v sînt izoterme, avem F = 0, E=G şi curbura totală este dată de relaţia

$$K = -\frac{E''_{u^2} + E''_{v^2}}{2E^2} + \frac{E'^2_u + E'^2_v}{2E^3}.$$

In sfîrşit, dacă coordonatele u şi v sînt geodezice, avem E=1, F=0 şi curbura totală a suprafeţei este

$$K = -\frac{G''_{u^2}}{2G} + \frac{G'^2_u}{4G^2}.$$

Ea se mai poate scrie încă sub forma

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

14. Aplicabilitatea a două suprafeţe

Fie (S) şi (S_1) două suprafeţe ale căror metrici sînt

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

şi

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2.$$

Dacă există o transformare

$$u_1 = u_1(u,v), \qquad v_1 = v_1(u,v) \tag{84}$$

prin care să obţinem

$$E_1 = E, \qquad F_1 = F, \qquad G_1 = G,$$

suprafeţele se numesc <u>aplicabile</u>.

Ţinînd seama că metrica unei suprafeţe reprezintă distanţa dintre două puncte de pe suprafaţă rezultă că:

<u>Fiind date două suprafeţe aplicabile prin transformarea (84), distanţele dintre punctele corespondente sînt egale</u>.

De asemenea, unghiul dintre două curbe de pe o suprafaţă depinde numai de coeficienţii metricei suprafeţei, deci:

<u>Unghiul dintre două curbe de pe o suprafaţă este egal cu unghiul dintre curbele corespondente de pe o suprafaţă aplicabilă pe aceasta</u>.

In sfîrşit, ţinînd seama de formula (83), rezultă că

<u>Două suprafeţe aplicabile au aceeaşi curbură totală</u>.

In legătură cu această noţiune să demonstrăm teorema:

<u>Un elicoid este aplicabil pe o suprafaţă de rotaţie</u>.

Ecuaţiile parametrice ale elicoidului sînt

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av + f(u), \quad (a\neq 0).$$

Calculînd derivatele parţiale ale acestor funcţii, obţinem metrica elicoidului

$$ds^2 = \left[1+f'^2(u)\right]du^2 + 2a\,f'(u)\,du\,dv + (u^2+a^2)\,dv^2. \tag{85}$$

Fie o suprafaţă de rotaţie

$$x = u_1\cos v_1, \quad y = u_1\sin v_1, \quad z = \varphi(u_1),$$

a cărei metrică este

$$ds_1^2 = \left[1+\varphi'^2(u_1)\right]du_1^2 + u_1^2\,dv_1^2. \tag{86}$$

Căutînd să punem în evidenţă în forma pătratică (85) un pătrat perfect, obţinem

$$ds^2 = (u^2+a^2)\left[dv + \frac{af'(u)}{u^2+a^2}\,du\right]^2 + \frac{u^2+a^2+u^2f'^2(u)}{u^2+a^2}\,du^2.$$

Dacă notăm

$$dv_1 = dv + \frac{af'(u)}{u^2 + a^2}\,du\,,$$

deducem

$$v_1 = v + a\int \frac{f'(u)}{u^2 + a^2}\,du. \qquad (87)$$

De asemenea vom pune

$$u_1 = \sqrt{u^2 + a^2}, \qquad (87')$$

de unde

$$u = \sqrt{u_1^2 - a^2}$$

şi

$$du = \frac{u_1\,du_1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,.$$

Cu aceste notaţii, metrica elicoidului devine

$$ds^2 = \frac{u_1^2 + (u_1^2 - a^2)\,f'^2(\sqrt{u_1^2 - a^2})}{u_1^2 - a^2}\,du_1^2 + u_1^2\,dv_1^2. \qquad (85')$$

Vom determina acum funcţia $\psi(u_1)$ cu condiţia ca

$$\frac{u_1^2 + (u_1^2 - a^2)\,f'^2(\sqrt{u_1^2 - a^2})}{u_1^2 - a^2} = 1 + \varphi'^2(u_1).$$

De aici rezultă

$$\psi(u_1) = \int \sqrt{\frac{a^2 + (u_1^2 - a^2)f'^2(\sqrt{u_1^2 - a^2})}{u_1^2 - a^2}}\,du_1$$

şi funcţia $\psi(u_1)$ este complet determinată.

Metrica (85') devine

$$ds^2 = \left[1 + \psi'^2(u_1)\right]du_1^2 + u_1^2\,dv_1^2\,.$$

Deci elicoidul este aplicabil prin transformarea (87),

(87') pe suprafaţa de rotaţie

$$x = u_1 \cos v_1, \qquad y = u_1 \sin v_1, \qquad z = \psi(u_1).$$

15. Sisteme triplu ortogonale

Să presupunem că avem în spaţiu trei familii de suprafeţe de ecuaţii

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= u, \\ F_2(x,y,z) &= v, \\ F_3(x,y,z) &= w, \end{aligned} \tag{88}$$

unde u, v, w sînt parametri variabili.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din spaţiu. Prin acest punct trece cîte o suprafaţă din fiecare familie de suprafeţe, şi anume

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= F_1(x_0,y_0,z_0), \\ F_2(x,y,z) &= F_2(x_0,y_0,z_0), \\ F_3(x,y,z) &= F_3(x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

Invers, pentru $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ avem cîte o suprafaţă din fiecare familie. Dacă pentru aceste valori ale lui u, v, w sistemul (88) se poate rezolva în raport cu x, y, z, cele trei suprafeţe se întîlnesc în punctul ale cărui coordonate sînt aceste valori ale lui x, y, z.

Deci, dacă sistemul de ecuaţii (88) se poate rezolva în raport cu x, y, z putem considera pe u, v, w ca nişte coordonate ale punctelor din spaţiu. Numim aceste coordonate, <u>coordonate curbilinii în spaţiu</u>.

Dacă soluţia sistemului (88) este

$$\begin{aligned} x &= f(u,v,w), \\ y &= \varphi(u,v,w), \\ z &= \psi(u,v,w), \end{aligned} \tag{88'}$$

atunci trecerea de la coordonatele carteziene la cele curbilinii şi invers este dată de ecuaţiile (88), respectiv (88').

Fie acum două puncte $P(x,y,z)$ şi $P'(x+dx, y+dy, z+dz)$. Distanţa dintre cele două puncte este dată de relaţia

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Din (88') rezultă

$$dx = f'_u\,du + f'_v\,dv + f'_w\,dw,$$
$$dy = \varphi'_u\,du + \varphi'_v\,dv + \varphi'_w\,dw,$$
$$dz = \psi'_u\,du + \psi'_v\,dv + \psi'_w\,dw.$$

De aici deducem

$$ds^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + 2a_{13}du\,dw + a_{22}dv^2 + 2a_{23}dv\,dw + a_{33}dw^2, \quad (89)$$

unde am pus

$$a_{11} = \sum f'^2_u, \qquad a_{22} = \sum f'^2_v, \qquad a_{33} = \sum f'^2_w,$$
$$a_{12} = \sum f'_u f'_v \qquad a_{13} = \sum f'_u f'_w \qquad a_{23} = \sum f'_v f'_w,$$

semnul sumă fiind extins la literele f, φ, ψ.

Dacă luăm $w = const.$, relaţia (89) ne dă elementul de arc pe suprafaţa $F_3(x,y,z) = const.$, u şi v fiind coordonate curbilinii pe această suprafaţă. Coordonatele u şi v sînt ortogonale pe această suprafaţă, dacă $a_{12} = 0$.

Deci, dacă suprafeţele $u=const.$, $v=const.$, $w=const.$ sînt ortogonale două cîte două, avem

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

şi reciproc. In acest caz spunem că suprafeţele (88) formează un <u>sistem triplu ortogonal</u> de suprafeţe.

Rezultă că pentru ca suprafeţele (88) să formeze un sistem triplu ortogonal, este necesar şi suficient să avem

$$f'_u f'_v + \varphi'_u \varphi'_v + \psi'_u \psi'_v = 0$$
$$f'f' + \varphi'_v \varphi'_w + \psi'_v \psi'_w = 0 \qquad (90)$$
$$f'_u f'_w + \varphi'_u \varphi'_w + \psi'_u \psi'_w = 0.$$

In acest caz, elementul liniar este

$$ds^2 = a_{11}du^2 + a_{22}dv^2 + a_{33}dw^2.$$

Dacă derivăm prima relaţie (90) în raport cu w, a doua în raport cu u şi a treia în raport cu v, obţinem

$$f''_{uw}f'_v + \varphi''_{uw}\varphi'_v + \psi''_{uw}\psi'_v + f'_u f''_{vw} + \varphi'_u\varphi''_{vw} + \psi'_u\psi''_{vw} = 0,$$

$$f''_{uv}f'_w + \varphi''_{uv}\varphi'_w + \psi''_{uv}\psi'_w + f'_v f''_{uw} + \varphi'_v\varphi''_{uw} + \psi'_v\psi''_{uw} = 0,$$

$$f''_{uv}f'_w + \varphi''_{uv}\varphi'_w + \psi''_{uv}\psi'_w + f'_u f''_{vw} + \varphi'_u\varphi''_{vw} + \psi'_u\psi''_{vw} = 0.$$

Adunînd ultimele două relaţii şi ţinînd seama de prima, deducem

$$f'_w f''_{uv} + \varphi'_w\varphi''_{uv} + \psi'_w\psi''_{uv} = 0. \qquad (91)$$

Din ultimele două relaţii (90) şi din relaţia (91), ţinînd seamă că nu putem avea $f'_w = \varphi'_w = \psi'_w = 0$, scoatem încă

$$\begin{vmatrix} f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \\ f'_{uv} & \varphi'_{uv} & \psi'_{uv} \end{vmatrix} = 0,$$

adică pe suprafaţa w=const., avem D'=0.

Avînd în vedere că pe această suprafaţă coordonatele u şi v sînt ortogonale, rezultă că pe suprafaţa w=const., curbele u=const. şi v=const. sînt linii de curbură.

Avem astfel:

T e o r e m a l u i D u p i n. Curbele de intersecţie ale suprafeţelor unui sistem triplu ortogonal sînt linii de curbură pentru fiecare suprafaţă.

Ca aplicaţie să demonstrăm că cuadricele homofocale formează un sistem triplu ortogonal.

Ecuaţia cuadricelor homofocale este

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0, \qquad (92)$$

unde λ este un parametru variabil.

Printr-un punct $P(x_0,y_0,z_0)$ trec trei cuadrice din familie.

Intr-adevăr, valorile lui λ pentru care cuadrica (92) trece prin punctul P sînt soluţiile ecuaţiei

$$\frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2-\lambda}-1=0,$$

care se mai poate scrie

$$f(\lambda)=(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-x_0^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-$$

$$-y_0^2(a^2-\lambda)(c^2-\lambda)-z_0^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)=0.$$

Presupunînd $c<b<a$, avem

$$f(-\infty)>0, \quad f(c^2)<0, \quad f(b^2)>0, \quad f(a^2)<0,$$

deci ecuaţia $f(\lambda)=0$ are trei rădăcini reale

$$\lambda_1<c^2, \quad c^2<\lambda_2<b^2, \quad b^2<\lambda_3<a^2.$$

Să arătăm că aceste trei cuadrice sînt perpendiculare două cîte două.

Fie deci cuadricele

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}-1=0 \qquad (93)$$

şi fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct de intersecţie al lor, adică un punct pentru care avem

$$\frac{x_o^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y_o^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z_o^2}{c^2-\lambda_1}-1=0,$$

$$\frac{x_o^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y_o^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z_o^2}{c^2-\lambda_2}-1=0.$$

De aici deducem prin scădere

$$\frac{x_o^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}+\frac{y_o^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}+\frac{z_o^2}{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}=0. \quad (94)$$

Planele tangente la cuadricele (93) în punctul P au ecuaţiile

$$\frac{x_o x}{a^2-\lambda_1}+\frac{y_o y}{b^2-\lambda_1}+\frac{z_o z}{c^2-\lambda_1}-1=0,$$

$$\frac{x_o x}{a^2-\lambda_2}+\frac{y_o y}{b^2-\lambda_2}+\frac{z_o z}{c^2-\lambda_2}-1=0.$$

Condiţia de ortogonalitate a acestor două plane este tocmai condiţia (94).

Deci, <u>cuadricele omofocale formează un sistem triplu ortogonal</u>.

Curbele lor de intersecţie sînt linii de curbură.

BIBLIOGRAFIE

1. B i a n c h i, L., Lezioni di geometria differenziale, N. Zanichelli, Bologna, 1927.
2. B l a s c k e, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Springer, Berlin, 1921.
3. C r e a n g ă, I. şi alţii, Curs de geometrie analitică, Bucureşti, Ed.tehnică, 1951.
4. D a r b o u x, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Gauthier-Villars, Paris, 1914.
5. D o b r e s c u, A., Geometrie diferenţială, Ed.didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
6. E i s e n h a r t, L. P., A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Dover Publ. New York, 1960.
7. E i s e n h a r t, L. P., An introduction to differential geometry, Princeton Univ. Press, 1947.
8. F a v a r d, J., Cours de géométrie différentielle locale, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
9. F i n i k o v, S. P., Curs de geometrie diferenţială (trad. din l.rusă), Bucureşti, Ed.tehnică, 1954.
10. G h e o r g h i u, G h. T h., Elemente de algebră şi geometrie analitică, Bucureşti, Ed.de stat didactică şi pedagogică, 1961.
11. K a g a n, V. F., Osnovî teorii poverhnostei, Oghiz, Moskva , 1950.
12. L a l e s c u T r., Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal, Biblioteca "Gazetei matematice".
13. R a ş e v s k i i, P. K., Kurs differentialnoi gheometrii Moskva , 1956.
14. S t o k a, M. şi V r ă n c e a n u G. G., Probleme de geometrie diferenţială, Bucureşti, Ed.didactică şi pedagogică, 1963.
15. V r ă n c e a n u, G., Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială, Bucureşti, Ed.didactică şi pedagogică, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

		Pag
Cap. I.	**Curbe plane**	
	1. Reprezentările analitice ale unei curbe plane	3
	2. Tangenta şi normala la o curbă	5
	3. Punct ordinar. Punct singular	8
	4. Puncte de inflexiune	14
	5. Asimptotele unei curbe plane	16
	6. Lungimea unui arc de curbă	18
	7. Cerc osculator. Curbură	22
	8. Ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane	28
	9. Infăşurătoarea unei familii de curbe	31
	10. Evoluta şi evolventa unei curbe plane	34
	11. Contactul a două curbe plane	38
Cap.II.	**Curbe strîmbe**	
	1. Ecuaţiile unei curbe strîmbe	45
	2. Tangentă. Plan normal	46
	3. Lungimea unui arc de curbă	50
	4. Plan osculator. Triedrul lui Frenet	54
	5. Formulele lui Frenet	60
	6. Curbura şi torsiunea unei curbe strîmbe . . .	64
	7. Cerc şi sferă osculatoare la o curbă strîmbă.	71
	8. Infăşurătoarea unei familii de curbe strîmbe.	76
	9. Evoluta şi evolventa unei curbe strîmbe . . .	79
	10. Contactul a două curbe strîmbe	81
Cap.III.	**Suprafeţe**	
	1. Reprezentările analitice ale unei suprafeţe .	85
	2. Planul tangent şi normala la o suprafaţă . .	87
	3. Suprafeţe riglate şi desfăşurabile	92
	4. Infăşurătoarea unei familii de suprafeţe . .	96
	5. Prima formă fundamentală a unei suprafeţe . .	104
	6. Metrica suprafeţelor de rotaţie şi riglate. .	112
	7. Reprezentarea conformă	115
	8. A doua formă fundamentală a suprafeţei . . .	118
	9. Curbura curbelor de pe suprafaţă	127
	10. Liniile de curbură pe o suprafaţă	132
	11. Formula lui Euler. Indicatoarea lui Dupin . .	143
	12. Curbura geodezică. Linii geodezice	146
	13. Proprietăţi intrinseci. Teorema lui Gauss . .	154
	14. Aplicabilitatea a două suprafeţe	157
	15. Sisteme triplu ortogonale	160
Bibliografie	. . . . .	165

Redactor responsabil: Ing. AMUZESCU ANA
Tehnoredactor: PROSAN ILINCA

Dat la cules 30.03.1964. Bun de tipar 14.07.1964. Apărut 1964. Tiraj 3500+110 leg 1/2. Hîrtie scris tip. II-A 63 g/m^2, format 8/61x86. Coli editoriale 7,203. Coli de tipar 21. A 4601. Ç.Z. pentru bibliotecile mari 513 (075.8). C.Z. pentru bibliotecile mici 51.

I.P.GRAFICA NOUA Unitatea II
Str.Alex.Odobescu nr.12 Bucureşti
Comanda nr.8589

Moldova

1449-1451 Bogdan II; tatal lui Stefan
1451-1455 - Petru Aron în țara de sus, Alexandrel cea de jos
1455-1457 - Petru Aron - frate vitreg al lui Bogdan II
1457-1504 Stefan cel Mare
1504-1517 Bogdan cel Orb fiul lui Stefan
1517-1527 Stefănița Vodă (domnește de la Iași) îl omoară pe Luca Arbore sg. pe fiul acestuia.
1527-1538 - Petru Rareș fiul lui Stefan sg al Mariei lui Rareș.
1538-1540 Stefan Lăcusta
1541-1546 Petru Rares
1546-1551 Iliași fiul lui Petru Rares; turcit; trece la mahomedanism, sub numele de Mehmed, beg de Silistra
1551-1552 Stefan Rares - fratele lui Iliași
1552-1561 - Alex. Lăpușneanu fiul nelegitim al lui Stefănița
1561-1563 - Iacob Vasilic Despot.
- Stefan Tomșa
1564-1568 Alex Lăpușneanul.
1568-1572 Bogdan IV fiul lui Alex. Lăpușneanu
1572-1574 Ion Vodă cel Cumplit; fiu nelegitim al lui Stefănița
1574-1578 - Petre Schiopul; fratele lui Alex III (Muntenia)
1579-1582 - Iancu Sasu - fiu nelegitim a lui Petru Rareș.
1582-1591 - Petre Schiopul.
1591-1595 - Aron Tiranul, fiul lui Alex Lăpușneanu.

mi-a rapta
ca-i să-mi
pipota

Dir.
11.687

13959 - C - Sef
14666

T.R

1436-1446 - Vlad Dracul - tatăl lui Vlad Tepeș; este ucis de către Ioan Corvin pt că-l părăsise
1446-1456 - Vladislav II fiul lui Dan II.; este detronat de Ioan Corvin.
1456-1462 - Vlad Tepeș.
1462-1474 Radu cel Frumos - fratele lui Vlad Tepeș.
1474-1477 Basarab II (Laiotă) fiul lui Dan II
1477-1482 Basarab III fiul lui Laiotă; „Tepeluș"
1482-1496 Vlad Călugărul - fratele nelegitim al lui Vlad Tepeș
1496-1508 - Radu cel Mare - fiul lui Vlad Călugărul
1508-1510 Mihnea cel Rău; fiul lui Tepeș
1510-1512 Vlăduță fiul lui Vlad Călugărul
1512-1521 Neagoe Bararab fiul lui Tepeluș (avea fiu pe Teodosie) care avea 7 ani la moartea lui Neagoe.
— lupte pt domnie
1525-1529 Radu de la Afumați. fiu nelegitim al lui Radu cel Mare.
1530-1532 - Vlad Innecatul - fiul lui Vlăduț; căsătorit cu Chijna, fiica lui Petru Rareș
1532-1535 - Vintilă din Slatina
1535-1545 Radu Paisie fiul nelegitim al lui Radu cel Mare
1545-1554 - Mircea Ciobanul căsătorit și el cu Chiajna.
1554-1557 - PĂTRASCU cel BUN - fiul lui Radu Paisie.; tatăl lui Mihai Viteazul (era fiul nelegitim)
1558-1559 - Mircea Ciobanul a II oară.
1559-1568 - Petru cel Tinar fiul lui Mircea Ciobanu și al Chiajnei
1568-1577 - Alexandru III ~~fiul lui~~ nepotul lui Mihnea cel Rău
1577-1583 Mihnea Turcitul fiul lui Alex. III și al Ecaterinei Iminos
1583-1585 - Petru Cercel fiul lui Pătrașcu, pot, ca domn strângă bani
1585-1591 - Mihnea II oară - trece la mohomedanism spre a fi domn
1591-1592 - Ștefan Surdul - fiul lui Ioan Vodă cel Cumplit
1592-1593 - Alexandru cel Rău; fiul lui Bogdan Lăpuneanu

J. 2-88

RUGACIUNE DE RECOMANDARE CATRE SFINTUL ANTON DE PADOVA

Sfinte Antoane, între toţi sfinţii lui Dumnezeu, tu ai fost înzestrat cu o putere deosebită pentru a ocroti şi ajuta pe toţi cei care şi-au pus nădejdea în tine. Dumnezeu ţi-a dat chiar puterea de a învia morţii, de a reda celor orbi vederea, celor bolnavi sănătatea, astfel încît toţi cei care au alergat la tine au simţit mîngîierea sprijinului tău.

Această grijă a ta faţă de suferinţele oamenilor, mă umple şi pe mine de încredere sfîntă, cu care alerg la bunătatea ta, cerîndu-ţi ajutor. Pentru dragostea ta înflăcărată către Isus, care a voit să coboare în braţele tale sub chip de Prunc ceresc şi pentru iubirea ta gingaşă faţă de Maria, Mama lui Isus, te rog arată-ţi acum puterea ta cea mare şi ajută-mă.

Tu eşti tăria mea în suportarea necazurilor, în nenorocirile care mă lovesc, în întristările mele sufleteşti, în boli şi lipsuri, în necazuri şi încercări de tot felul. Fii, deci, lîngă mine cînd patimile îmi răscolesc sufletul şi cînd duhul cel rău unelteşte împo-

CRED IN DUMNEZEU, Tatăl atotputernicul, creatorul cerului şi al pământului, şi în Isus Cristos, Fiul său unic, Domnul nostru, care s-a zămislit de la Duhul Sfînt, s-a născut din Maria Fecioară, a pătimit sub Ponţiu Pilat, s-a răstignit, a murit şi s-a îngropat; s-a coborît în iad, a treia zi a înviat din morţi, s-a suit la ceruri, şade de-a dreapta lui Dumnezeu, Tatăl atotputernicul, de unde are să vină să judece pe vii şi pe morţi.

Cred în Duhul Sfînt, sfînta Biserică catolică, împărtăşirea sfinţilor, iertarea păcatelor, învierea morţilor, viaţa veşnică. Amin.

ADU-TI AMINTE, preablîndă Fecioară Marie, că nu s-a auzit niciodată să fi fost părăsit cel ce a alergat sub ocrotirea ta, cerînd ajutorul şi mijlocirea ta. Insufleţit de o astfel de încredere, alerg la tine, Maică Fecioară a Fecioarelor. La tine vin şi stau gemînd înaintea ta ca un păcătos. Maica Cuvîntului, nu dispreţui cuvintele mele, dar auzi-mă cu milă şi ascultă-mă. Amin.

RUGACI
CATRE SI

Sfinte Ar
lui Dumneze
o putere de
ajuta pe to
dejdea în t
ar puterea
da celor or
sănătatea,
au alergat
rea sprijin

Aceasti
ţele oameni
încredere s
nătatea ta.
dragoste t
care a voit
le sub chip
iubirea ta
lui Isus, t
rea ta cea

Tu eşti
gubelor, în
vesc, în în
în boli şi
pite de tot
cînd petimi
şi cînd au

Scanned with OKEN Scanner

triva sufletului meu ca să-l piardă.
Sfinte Antoane, te rog ajută-mă în toate lipsurile mele trupeşti şi sufleteşti. Alină şi mîngîie sufletul meu în orice strîmtorare, pentru ca, îmbărbătat de tine, să primesc cununa biruinţei de la Dumnezeu în slava veşnică a cerului. Amin.

RUGACIUNE PENTRU DOBINDIREA UNUI HAR DEOSEBIT

La tine alergăm, Sfinte Antoane, care ai avut o inimă înflăcărată de dragoste către Dumnezeu şi către aproapele: pe tine te invocăm, puternicule făcător de minuni, care ai ţinut în braţele tale pe Isus Cristos sub chip de Prunc: către tine ne îndreptăm plini de încredere, ca să mijloceşti la bunul Isus harul pe care îl dorim din adîncul inimii.
(se spune dorinţa...)
Sfinte Antoane, nu privi la nevrednicîile noastre, ci la slava lui Dumnezeu, care va fi preamărit prin tine, şi la binele sufletelor noastre, precum şi al acelora, pe care îi vom ajuta la rîndul nostru.

In semn de recunoştinţă vom căuta să ducem o viaţă cît mai potrivită cu învăţăturile sfintei Evanghelii şi vom căuta să imităm virtuţile tale, ajutîndu-i pe cei săraci şi muncind pentru răspîndirea binelui. Amin.

... + ...

TATAL NOSTRU, care eşti în ceruri, sfinţească-se numele tău, vie împărăţia ta, facă-se voia ta, precum în cer aşa şi pe pămînt.
Pîinea noastră cea de toate zilele dă-ne-o nouă astăzi şi ne iartă nouă greşelile noastre, precum şi noi iertăm greşiţilor noştri. Si nu ne duce pe noi în ispită, ci ne mîntuieşte de cel rău. Amin.

BUCURA-TE, MARIE, cea plină de har, Domnul este cu tine, binecuvîntată eşti tu între femei şi binecuvîntat este rodul trupului tău, Isus.
Sfîntă Marie, Maica lui Dumnezeu, roagă-te pentru noi păcătoşii, acum şi în ceasul morţii noastre. Amin.

SLAVA TATALUI şi Fiului şi Sfîntului Duh, precum era la început, şi acum şi pururea şi în vechii veacilor. Amin.

Câteva precizări la ediţia a II-a

În linii generale, structura volumului a rămas aceeaşi ca la prima ediţie, modificările vizând doar unele intervenţii de amănunt. În primul rând, s-au introdus, la fiecare parte de vorbire, aspecte legate de ortografia şi ortoepia acestora, regulile fiind extrase, de obicei din *Îndreptarul ortografic, ortoepic şi de punctuaţie* şi/sau din *Dicţionarul ortografic, ortoepic şi morfologic al limbii române*.

De asemenea, deşi la părţile de propoziţie figura realizarea acestora în toate cazurile unei părţi de vorbire sau ale alteia, am exemplificat şi la părţile de vorbire respective pentru fiecare caz în parte, realizând astfel o corespondenţă mai strânsă între părţile de propoziţie şi cele de vorbire.

Totodată, la fişa despre verb, am considerat că este necesară discutarea amănunţită a verbelor copulative şi auxiliare, care figura, iniţial, la predicatul nominal, operând astfel reaorganizarea materialului din cele două fişe. Alte modificări vizează reorganizarea materialului deja existent în cadrul aceleiaşi fişe recapitulative, cum ar fi cele referitoare la interjecţie şi la pronumele interogative şi relative.

Mulţumim pe această cale celor care ne-au sugerat unele din completările menţionate, colegilor profesori care au găsit o clipă de răgaz să se aplece cu atenţie asupra lucrării noastre.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Prefaţă

Lucrarea de faţă se adresează, în primul rând, elevilor de gimnaziu, dorindu-se a fi un instrument util de lucru, de muncă independentă, atât în vederea pregătirii lecţiilor curente de la clasă, cât şi în *vederea examenului de capacitate şi a celui de admitere în licee*. Având în vedere faptul că vizează conţinutul actualelor manuale şcolare de limba română care figurează şi în bibliografia pentru admiterea în facultăţi şi colegii, prezentul volum *este totodată destinat şi viitorilor candidaţi la admiterea în învăţământul superior*.

Caracterul practic al lucrării constă în faptul că *după abordarea unor noţiuni teoretice, au fost incluse exerciţii de tipuri diferite urmate de soluţiile lor*. Acolo unde a fost cazul, s-au făcut unele *observaţii şi precizări*, s-au dat unele *indicaţii asupra modului de rezolvare a exerciţiilor propuse*.

Noţiunile teoretice *au fost sistematizate în fişe recapitulative* cuprinzătoare, vizând notele definitorii ale fiecărei părţi de vorbire şi de propoziţie, ale fiecărei propoziţii subordonate, iar *noutatea absolută* a acestei lucrări *constă în abordarea concomitentă a unor noţiuni de morfologie şi de sintaxă*. Astfel, după verb, adverb şi interjecţie este tratat predicatul, după conjuncţie şi prepoziţie sunt puse în discuţie relaţiile (raporturile) sintactice din propoziţie şi din frază, cărora le urmează corespondenţa dintre părţile de propoziţie şi propoziţiile subordonate, felul acestora ş.a.m.d.

Datorită modului de prezentare a noţiunilor teoretice şi diversităţii exerciţiilor credem că *lucrarea poate fi folosită eficient şi de cadrele didactice în lecţiile de dobândire a cunoştinţelor şi în cele de recapitulare, sistematizare şi consolidare*. Ne exprimăm însă convingerea că ea îşi va dovedi utilitatea mai ales în pregătirea tuturor elevilor în vederea probelor pe care le vor susţine la limba română fie la examenul de capacitate, fie la examenele de admitere în învăţământul liceal şi chiar în cel universitar.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Sorcini ARLUS

1/ noi trasieri de membri in ARLUS –
2/ Difuzorea de ziare Veac Nou –
3/ Până la 1 Aprilie – banii de la cotizate
10 bani pe lună –
Dela 1 Aprilie 20 bani pe lună –

Scanned with OKEN Scanner